

Билеты к устному экзамену

Ярослав Постовалов

Игорь Лотов

Маргарита Чурина

Тимофей Васильев

Дарья Бовкун

Май 2021

Содержание

Билет №1	2
1.1 Теория множеств (множество, подмножество, операции над множествами)	2
1.2 Стереометрия (аксиомы, следствия из аксиом)	3
Билет №2	5
2.1 Теория множеств (функции, графики функций)	5
2.2 Стереометрия (прямые в пространстве, параллельность)	6
Билет №3	8
3.1 Тригонометрия (синус)	8
3.2 Стереометрия (параллельность прямой и плоскости)	9
Билет №4	10
4.1 Тригонометрия (косинус)	10
4.2 Стереометрия (параллельность двух плоскостей)	11
Билет №5	11
5.1 Алгебра (уравнение, равносильные преобразования)	11
5.2 Стереометрия (перпендикулярность прямой и плоскости)	12
Билет №6	13
6.1 Тригонометрия (тангенс, котангенс)	13
6.2 Стереометрия (угол между наклонной и плоскостью, теорема о трех перпендикулярах)	14
Билет №7	15
7.1 Тригонометрия (основное тригонометрическое тождество, синус суммы)	15
7.2 Стереометрия (двугранный угол)	16
Билет №8	17
8.1 Тригонометрия (основное тригонометрическое тождество, косинус суммы)	17
8.2 Стереометрия (скрещивающиеся прямые)	18
Билет №9	19
9.1 Тригонометрия (синус, формулы двойного и тройного аргумента)	19
9.2 Стереометрия (параллельность плоскостей)	20
Билет №10	21
10.1 Теория чисел (натуральные числа, аксиомы Пеано)	21
10.2 Стереометрия (перпендикулярность плоскостей)	22
Билет №11	23
11.1 Теория чисел (НОД, алгоритм Евклида)	23
11.2 Стереометрия (расстояние между множествами точек, между скрещивающимися прямыми)	23
Билет №12	24
12.1 Теория чисел (делимость)	24
12.2 Стереометрия (расстояния между множествами точек, точкой и прямой, точкой и плоскостью)	25
Билет №13	25
Билет №14	26
14.1 Теория чисел (сравнение по модулю)	26
14.2 Стереометрия (двугранный угол)	26
Билет №15	26
15.1 Теория чисел (сравнение по модулю, малая теорема Ферма)	26
15.2 Стереометрия (проекция точки, фигуры на плоскость)	27
Билет №16	27
16.1 Матанализ (предел последовательность, свойства сходящихся последовательностей)	27
16.2 Стереометрия (двугранный угол)	28
Билет №17	28
17.1 Матанализ (существование предела монотонной ограниченной последовательности)	28
17.2 Стереометрия (наклонная, ее проекция на плоскость)	29
Билет №18	29
18.1 Матанализ (предел функции, первый замечательный предел)	29
18.2 Стереометрия (трехгранный угол, теорема о плоских углах трехгранного угла)	31
Билет №19	32
19.1 Матанализ (непрерывность)	32
19.2 Стереометрия (трехгранный угол)	33
Билет №20	34
20.1 Матанализ (непрерывность, первая и вторая теоремы Больцано — Коши)	34
20.2 Трехгранный угол (первая теорема косинусов для трехгранного угла)	34
Билет №21	35
21.1 Логарифм (логарифмическая функция, тождества)	35
21.2 Стереометрия (теорема синусов трехгранного угла)	37
Билет №22	37
22.1 Матанализ (первая и вторая теоремы Вейерштрасса)	37
22.2 Стереометрия (трехгранный угол)	38
Билет №23	39
23.1 Матанализ (производная, теоремы Лагранжа и Коши)	39

23.2	Стереометрия (первая теорема косинусов для трехгранного угла)	40
Билет №24		40
24.1	Матанализ (производная, производные основных элементарных функций)	40
24.2	Стереометрия (теорема синусов для трехгранного угла)	40

Преамбула

Сей документ является результатом совместного труда добровольцев, заинтересованных во всеобщей сдаче экзамена; однако же никакой ответственности за оценку нижеприведенных решений не предусмотрено — используйте на свой **страх и риск**, некоторые формулировки определений и доказательств могут быть приняты не полностью, ответы на задачи иногда сверены численно или с помощью компьютерной алгебры, но не все шаги решений могут быть приняты экзаменатором. Рекомендуем, готовясь, разбираться в решениях самостоятельно, делать чертежи, а не слепо запоминать предложенную последовательность утверждений.

Авторы пособия не несут ответственности и за любое возможное недобросовестное использование собранного материала — например, в качестве шпаргалки, принесенной на экзамен.

Билет №1

1.1 Теория множеств (множество, подмножество, операции над множествами)

1. Понятие множества, подмножества.

Множество — совокупность некоторых предметов или объектов, при этом полагается, что все предметы отличны друг от друга и от предметов, не входящих в множество.

Множество A называется подмножеством множества B , если все элементы, принадлежащие A , также принадлежат B .

2. Операции над множествами.

Объединение, пересечение.

3. Объединение и пересечение двух множеств и их свойства.

- (а) Объединение $(A \cup B)$ — множество, содержащее все элементы исходных множеств. Коммутативно, ассоциативно.
- (б) Пересечение $(A \cap B)$ — множество, которому принадлежат те и только те элементы, которые одновременно принадлежат всем данным множествам. Коммутативно, ассоциативно, дистрибутивно относительно объединения.

Доказательство коммутативности:

Пусть A и B — некоторые множества. Докажем, что $A \cup B = B \cup A$:

$$A \cup B \Leftrightarrow \forall c : c \in A \text{ или } c \in B \Leftrightarrow \forall c : c \in B \text{ или } c \in A \Leftrightarrow B \cup A. \quad (1)$$

Аналогично можно вывести коммутативность пересечения множеств.

Доказательство ассоциативности:

Пусть A , B и C — некоторые множества. Докажем, что $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$:

$$x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \text{ или } (x \in B \text{ или } x \in C) \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \text{ или } x \in B) \text{ или } x \in C \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C. \quad (4)$$

Аналогично можно вывести ассоциативность пересечения множеств.

Доказательство дистрибутивности пересечения относительно объединения:

Пусть R , S , T — некоторые множества. Докажем, что $R \cup (S \cap T) = (R \cup S) \cap (R \cup T)$.

$$x \in R \cup (S \cap T) \Leftrightarrow x \in R \text{ или } (x \in S \text{ и } x \in T) \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow (x \in R \text{ или } x \in S) \text{ и } (x \in R \text{ или } x \in T) \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow x \in (R \cup S) \cap (R \cup T). \quad (7)$$

4. Задача. В группе из 100 туристов 70 человек знают английский язык, 45 знают французский язык и 23 знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского ни французского языка?

Знающие фр. язык — A , знающие англ. язык — B , все — C .

$$|A| = 45, |B| = 70, |A \cap B| = 23, |C| = 100; \quad (8)$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 92; \quad (9)$$

$$|C| - |A \cup B| = 8. \quad (10)$$

Ответ: 8.

1.2 Стереометрия (аксиомы, следствия из аксиом)

1. Основные аксиомы стереометрии.

- (a) Существует плоскости, на которых выполняются евклидова геометрия.
- (b) Через любые 3 точки можно провести плоскость, и притом только одну.
- (c) Если 2 плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

2. Следствия из аксиом.

- (a) Через прямую и точку, не лежащую на ней можно провести плоскость, и притом только одну.

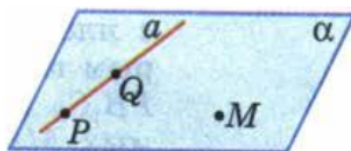


Рис. 1: Чертеж к доказательству

Рассмотрим прямую a и не лежащую на ней точку M (рис. 1). Докажем, что через прямую a и точку M проходит плоскость. Отметим на прямой a две точки P и Q . Точки M , P и Q не лежат на одной прямой, поэтому согласно аксиоме 1 через эти точки проходит некоторая плоскость α . Так как две точки прямой a (P и Q) лежат в плоскости α , то по аксиоме 2 плоскость α проходит через прямую a .

Единственность плоскости, проходящей через прямую a и точку M следует из того, что любая плоскость, проходящая через прямую a и точку M , проходит через точки M , P и Q . Следовательно, эта плоскость совпадает с плоскостью α , так как по аксиоме 1 через точки M , P и Q проходит только одна плоскость. Теорема доказана.

- (b) Через 2 пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом только одну.

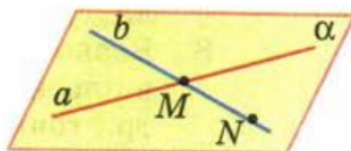


Рис. 2: Чертеж к доказательству

Рассмотрим прямые a и b , пересекающиеся в точке M (рис. 2), и докажем, что через эти прямые проходит плоскость, и притом только одна.

Отметим на прямой b какую-нибудь точку N , отличную от точки M , и рассмотрим плоскость α , проходящую через точку N и прямую a . Так как две точки прямой b лежат в плоскости α , то по аксиоме 2 плоскость α проходит через прямую b . Итак, плоскость α проходит через прямые a и b . Единственность такой плоскости следует из того, что любая плоскость, проходящая через прямые a и b , проходит через точку N . Следовательно, она совпадает с плоскостью α , поскольку через точку N и прямую a проходит только одна плоскость.

3. *Задача. В правильной 4-угольной пирамиде $SABCD$ на ребре BS взята точка M так, что $BM : MS = 3 : 1$, точка N — середина ребра SD . Определить, в каком отношении плоскость AMN делит ребро SC .*

См. рисунки 3 и 4.

- (a) Построим сечение пирамиды плоскостью (AMN). Наклонная MN пересекается со своей проекцией BD в точке K . Точка K лежит в плоскости основания (ABC) и в плоскости сечения (AMN) тоже.

- (b) Точка K и точка A обе лежат в плоскости (AMN) (в плоскости сечения, которую мы строим), поэтому мы можем их соединить; прямая KA лежит в плоскости сечения (AMN) и в плоскости основания пирамиды пересекается прямая KA с прямой BC в точке T . Точка T тоже лежит в плоскости сечения (AMN) и в плоскости основания пирамиды (т. к. принадлежит прямой KT и BC), и еще точка T лежит в плоскости (SBC) (т. к. принадлежит прямой BC).
- (c) Итак, точки T и M обе принадлежат плоскости (SBC) и плоскости сечения (AMN) , поэтому прямая MT тоже лежит в этих обеих плоскостях. Прямая MT пересекает ребро SC в точке P .
- (d) Построим сечение, соединив точки N и P .
- (e) Рассмотрим плоскость (SKB) . Из теоремы Менелая

$$\frac{SM}{MB} \cdot \frac{BK}{KD} \cdot \frac{DN}{SN} = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{BK}{KD} \cdot \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{BK}{KD} = \frac{3}{1} = 3. \quad (11)$$

- (f) Рассмотрим плоскость (TKB) . $\triangle AKD \sim \triangle KTB$, отсюда

$$\frac{KD}{KB} = \frac{KA}{KT} = \frac{AD}{BT} = \frac{1}{3}. \quad (12)$$

Обозначим $BC = a$, $BT = 3a$ из подобия треугольников, $CT = 4a$.

- (g) Рассмотрим плоскость (SCT) . Из теоремы Менелая

$$\frac{SM}{MB} \cdot \frac{BT}{CT} \cdot \frac{CP}{SP} = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{4a} \cdot \frac{CP}{SP} = 1 \Rightarrow \frac{CP}{SP} = \frac{4}{1} \quad (13)$$

или $\frac{SP}{CP} = \frac{1}{4}$, что и является искомым отношением.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Численный ответ к этой задаче для частного случая, когда $AB = 1$: $\frac{SP}{CP} = \frac{0,2000000000}{0,8000000000} \approx \frac{1}{4}$.

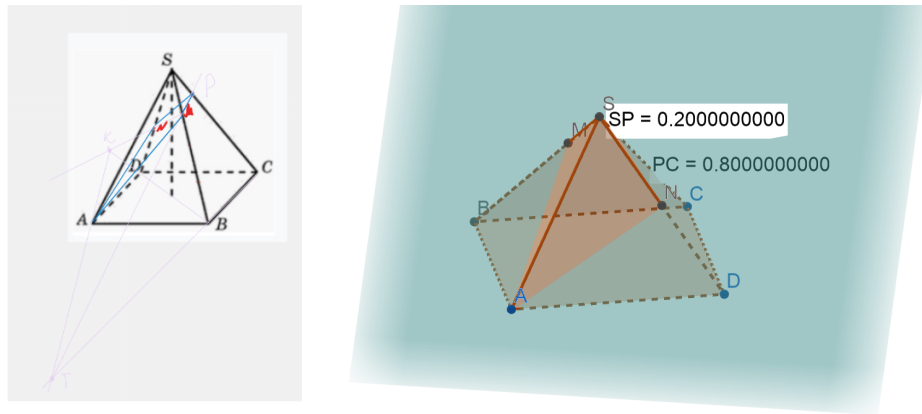


Рис. 3: Чертежи к решению, объем

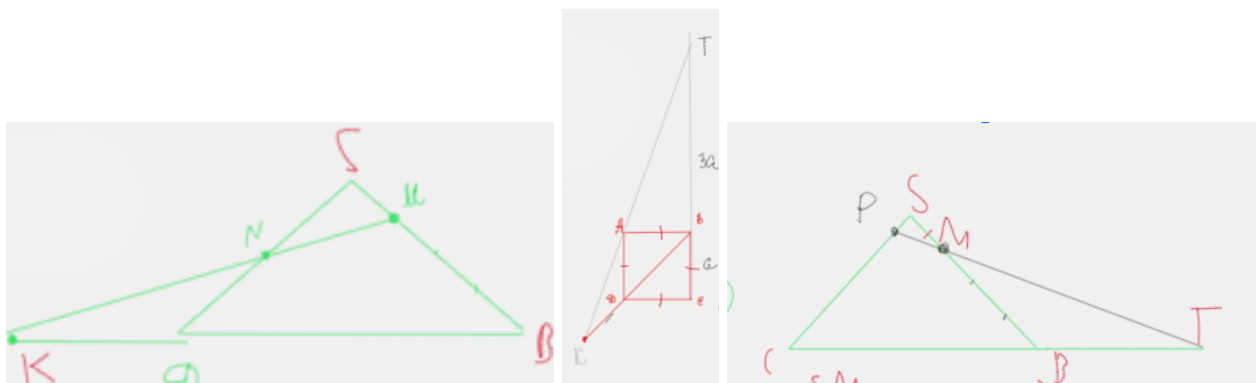


Рис. 4: Чертежи к решению, плоскости

Билет №2

2.1 Теория множеств (функции, графики функций)

1. Понятие функции.

Функция — соответствие между элементами двух множеств, установленное по такому правилу, что каждому элементу первого множества соответствует один и только один элемент второго множества.

2. Координатная плоскость.

Если построить две взаимно перпендикулярные оси Ox , Oy , то они будут называться осями координат. Плоскость, на которой лежат оси координат называется координатной.

3. График функции.

График функции $f(x)$ — геометрическое место точек с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

4. Теорема о графике обратной функции.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрис I и III координатных углов.

Доказательство:

См. рис. 5.

Пусть $y = f(x)$ — обратимая функция, а $y = f^{-1}(x)$ — обратная к ней.

Рассмотрим произвольную точку $M(a; b)$ на графике прямой функции, т. е. $(x; f(x))$.

Следовательно, $b = f(a)$. По определению обратной функции: $a = f^{-1}(b)$, т. е. $M_1(b; a)$ принадлежит графику $f^{-1}(x)$.

Покажем, что M и M_1 симметричны относительно биссектрис I и III координатных углов: очевидно, что расстояния от начала координат до точек M и M_1 равны:

$$OM = \sqrt{a^2 + b^2}, OM_1 = \sqrt{a^2 + b^2}, OM = OM_1. \quad (14)$$

Следовательно, $\triangle OMM_1$ — равнобедренный, а биссектриса из вершины O является высотой и медианой, т. е. проходит через середину MM_1 , следовательно, координаты середины MM_1 равны: $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b+a}{2}\right)$, что означает то, что она лежит на прямой $y = x$, ч. т. д..

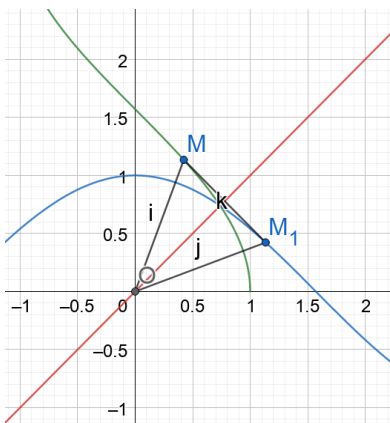


Рис. 5: Иллюстрация доказательства

5. Задача. Для функции $y = x^2 - 2x - 3, x \in [0; 3]$, установить, существует ли обратная функция и, если существует, то найти ее.

См. рисунок 6.

Заметим, что прямая функция немонотонна, рассмотрим три ее значения — для $x = 0, 1, 2$ y будет равно $-3, 1, -3$ соответственно, то есть приращения

Решим уравнение $y = x^2 - 2x - 3$ относительно x для $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 - 2x - 3 - y = 0; \quad (15)$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3 - y) \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} 1 - \sqrt{y + 4}, \\ \sqrt{y + 4} + 1, \end{cases} \quad (16)$$

Отсюда имеем обратное уравнение для $x \in \mathbb{R}$ и сразу ограничим его область определения областью значений функции $y = x^2 - 2x - 3, x \in [0; 3]$ как $[-4; 0]$ и $x + 4 \geq 0$:

$$\begin{cases} y = 1 - \sqrt{x + 4} \text{ для } x \in [-4; -3], \\ y = \sqrt{x + 4} + 1 \text{ для } x \in [-4; 0]; \end{cases} \quad (17)$$

однако, оно неоднозначно — содержит более, чем одно решение y для одного и того же x , поэтому обратной функции не существует.

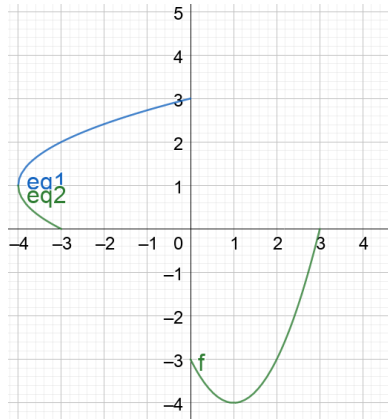


Рис. 6: Иллюстрация решения

2.2 Стереометрия (прямые в пространстве, параллельность)

1. Взаиморасположение прямых в пространстве.

- Прямые параллельны, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.
- Прямые скрещиваются, если они лежат в разных плоскостях и не пересекаются.
- Прямые пересекаются, если они имеют одну общую точку.

2. Признак параллельности прямых в пространстве.

Две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости тогда и только тогда, когда они параллельны.

Доказательство:

Сначала докажем, что две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, если они параллельны.

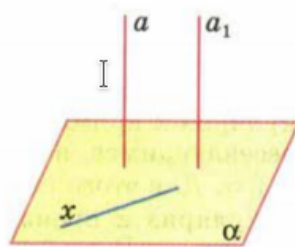


Рис. 7: Иллюстрация доказательства

См. рис. 7.

Рассмотрим две параллельные прямые a и a_1 и плоскость α такую, что $a \perp \alpha$. Докажем, что $a_1 \perp \alpha$.

Проведем какую-нибудь прямую x в плоскости α . Т. к. $a \perp \alpha$, то $a \perp x$. По лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей $a_1 \perp x$. Таким образом, прямая a_1 перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости α , т. е. $a_1 \perp \alpha$, ч. т. д.

Докажем обратную теорему.

См. рис. 8.

Рассмотрим прямые a и b , перпендикулярные к плоскости α (а). Докажем, что $a \parallel b$.

Через какую-нибудь точку M прямой b проведем прямую b_1 , параллельную прямой a . По предыдущей теореме $b_1 \perp \alpha$. Докажем, что прямая b_1 совпадает с прямой b . Тем самым будет доказано, что $a \parallel b$. Допустим, что

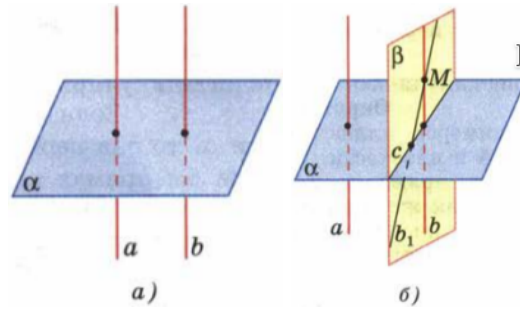


Рис. 8: Иллюстрация доказательства

прямые b и b_1 не совпадают. Тогда в плоскости β , содержащей прямые b и b_1 , через точку M проходят две прямые, перпендикулярные к прямой c , по которой пересекаются плоскости α и β (б). Но это невозможно, следовательно $a \parallel b$. Теорема доказана.

3. *Задача.* В правильной 4-угольной пирамиде $SABCD$ точки M и N — середины ребер AB и SC соответственно, K — середина отрезка DM . Через точку K проведена прямая, параллельная прямой DN , пересекающая плоскость BSC в точке L . Найти длину отрезка KL , если $AB = AS = 8$.

См. рис. 9.

- (а) Построим сечение пирамиды плоскостью (DMN) . В плоскости (ABC) : $DK \cap BC = G$. $DK \in (DMN) \Rightarrow G \in (DMN)$.
 $\triangle ADM = \triangle BGM$ по катету и острому углу ($AB = BM$ по условию, $\angle AMD = \angle BMG$ — вертикальные углы) $\Rightarrow BG = AD = 8, DM = MG$.
- (б) В плоскости (BCS) : $GN = (DMN) \cap (BCS), GN \cap BS = P$. $DMPN$ — сечение пирамиды плоскостью (DMN) .
- (с) В плоскости (DMN) проведем $KL \parallel DN$ ($L \in GN \Rightarrow L \in (SBC)$).
- (д) Найдем длину KL :
 $KL \parallel DN \Rightarrow \angle GKL = \angle GDN$ (соответственные углы), $\angle G$ — общий $\Rightarrow \triangle GKL \sim \triangle GDN$ по двум углам, тогда $\frac{DN}{KL} = \frac{GD}{GK}$. $DK = KM, DM = MG \Rightarrow \frac{GD}{GK} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{DN}{KL} = \frac{4}{3}$.
 Найдем DN : в $\triangle DCSDN$ — медиана, высота, биссектриса (т. к. $\triangle DCS$ — равносторонний) $\Rightarrow \angle DNC = 90^\circ$. $DN = \sqrt{DS^2 - SN^2} = \sqrt{DS^2 - \frac{1}{4} \cdot DS^2} = \sqrt{64 - 16} = 4\sqrt{3}$.
 $KL = \frac{3 \cdot DN}{4} = \frac{3 \cdot 4\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$.

Ответ: $3\sqrt{3}$.

Численный ответ: $5,19615423 \approx 3\sqrt{3}$.

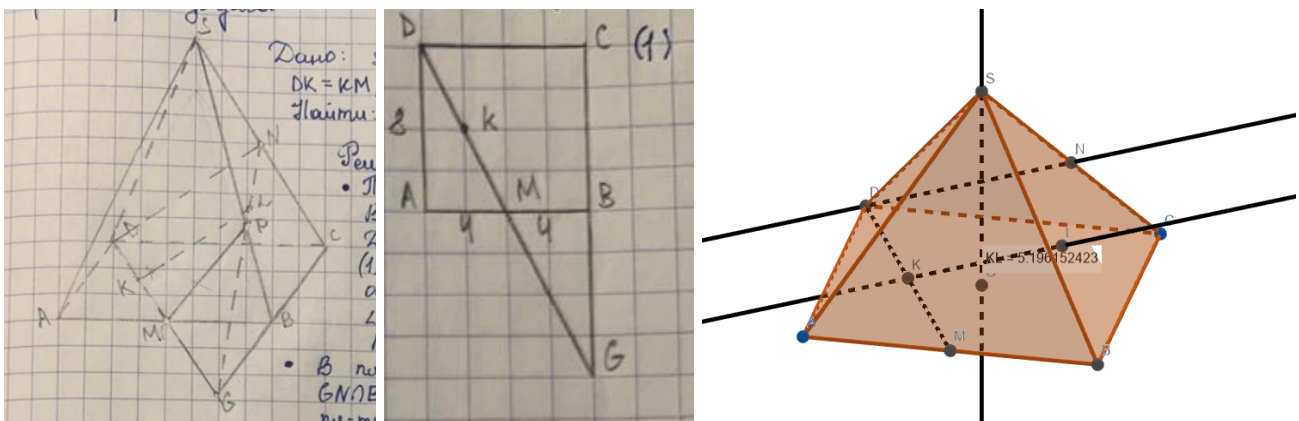


Рис. 9: Чертежи к решению

Билет №3

3.1 Тригонометрия (синус)

1. Функция $y = \sin x$ и ее свойства.

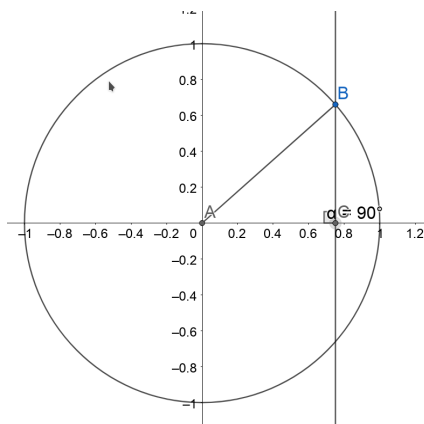


Рис. 10: Единичная окружность

Рассмотрим единичную окружность C в декартовой системе координат, центр A которой совпадает с точкой начала координат.

Всякий угол α можно рассматривать как поворот от положительного направления оси абсцисс до некоторого луча AB , при этом направление поворота против часовой стрелки считается положительным, а по часовой стрелке — отрицательным. Ординату обозначим y_B (см. рис. 10). Тогда синусом α называется $\sin \alpha = y_B$.

Свойства синуса:

- (a) $D(\sin) = \mathbb{R}$.
- (b) $E(\sin) = [-1; 1]$.
- (c) Периодическая функция с периодом $T = 2\pi$.
- (d) Нечетная функция.
- (e) $\sin x > 0$ при $x \in (0; \pi)$ со сдвигами на $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.
- (f) $\sin x < 0$ при $x \in (\pi; 2\pi)$ со сдвигами на $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.
- (g) $\sin x \nearrow$ при $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ со сдвигами на $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.
- (h) $\sin x \searrow$ при $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ со сдвигами на $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

2. Решение уравнения $\sin x = a$.

$$x = \begin{cases} \arcsin a + 2\pi k, \\ \pi - \arcsin a + 2\pi k \end{cases} \quad \text{для } k \in \mathbb{Z}. \quad (18)$$

3. Задача. Решить уравнение $2 \sin^2 2x + \sin^2 4x = \frac{5}{4}$.

$$2 \sin^2 2x + \sin^2 4x = \frac{5}{4}; \quad (19)$$

$$2 \sin^2 2x + 4 \sin^2 2x \cos^2 2x = \frac{5}{4}; \quad (20)$$

$$2t + 4t(1-t) = \frac{5}{4}, \text{ при этом пусть } t = \sin^2(2x); \quad (21)$$

$$t = \begin{cases} \frac{5}{4}, \\ \frac{1}{4}; \end{cases} \quad (22)$$

$$\sin^2 2x = \begin{cases} \frac{1}{4}, \\ \frac{5}{4} - \text{посторонний, т. к. } \arcsin \frac{\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{R}; \end{cases} \quad (23)$$

$$x = \frac{1}{2} \left(\pi n \pm \frac{\pi}{6} \right) \text{ для } n \in \mathbb{Z}. \quad (24)$$

3.2 Стереометрия (параллельность прямой и плоскости)

1. Определение и признак параллельности прямой и плоскости.

Прямая параллельна плоскости тогда и только тогда, когда они не имеют общих точек.

Признак: прямая параллельна плоскости тогда и только тогда, когда прямая параллельна любой прямой, лежащей в плоскости.

Доказательство:

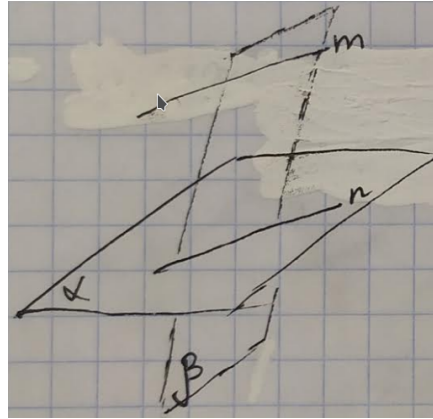


Рис. 11: Чертеж к доказательству

См. рис. 11.

Проведем плоскость β через прямые m и n . α и β пересекаются по прямой n .

Если бы m пересекала α , то пересекала бы и n . Но $m \parallel n$, поэтому m не пересекает α , следовательно $m \parallel \alpha$, ч. т. д..

2. Задача. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со стороной 2 точка M — середина ребра CD . Определить длину отрезка линии пересечения плоскостей $B_1 C D_1$ и $B C_1 M$, заключенной между плоскостями граней $A A_1 B_1 B$ и $C C_1 D_1 D$.

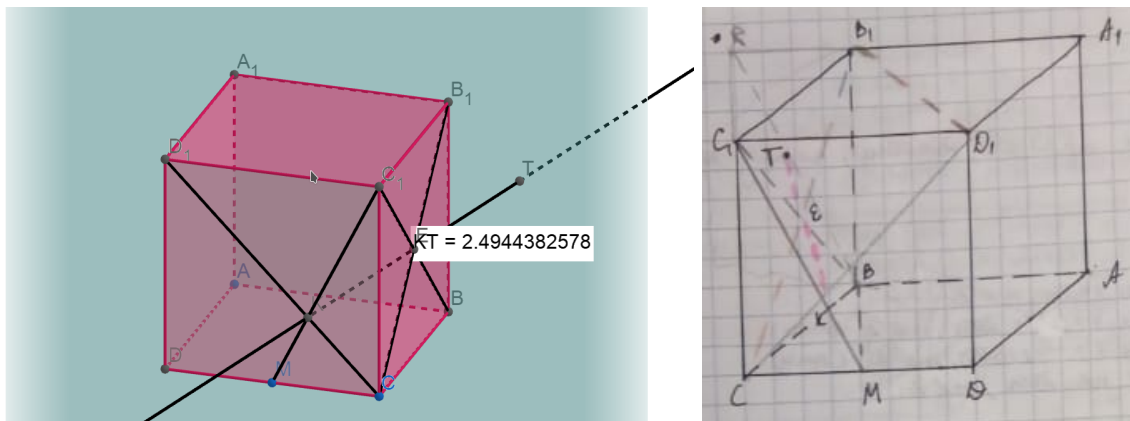


Рис. 12: Чертеж к решению

См. рис. 12.

Пусть $K = C D_1 \cap C_1 M$, $E = B C_1 \cap B_1 C$, $T = E K \cap (A_1 B_1 B)$.

(a) Проведем $B_1 R = 1 = C M$.

(b) $B R \parallel C_1 M$.

(c) $C_1 R = B M = \sqrt{5}$.

(d) $C_1 R B M$ — ромб, т. к. линии пересечения параллельных плоскостей другой плоскостью параллельны.

(e) $C_1 M \parallel B R$; $C_1 R \parallel B M \Rightarrow$ — параллелограмм, $C_1 M = M B = B R = C_1 R$ — ромб.

(f)

$$\frac{KM}{KC_1} = \frac{MC}{C_1 D_1} = \frac{1}{2}. \quad (25)$$

(g) E — середина C_1B и одновременно центр симметрии ромба.

(h) $KM = RT = x$, $C_1R = TB = 2x$.

(i) $C_1M = \sqrt{5}$, $C_1K = \frac{2}{3}\sqrt{5}$.

(j) $C_1B = 2\sqrt{2}$, $C_1E = EB = \sqrt{2}$.

(k)

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{C_1E}{C_1M}. \quad (26)$$

(l) Из $\triangle KC_1E$ по т. косинусов:

$$KE = \sqrt{2 + \frac{4 \cdot 5}{9} - 2 \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{3} \cdot 2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{14}}{3}. \quad (27)$$

(m) $KT = 2KE = \frac{2\sqrt{14}}{3}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{14}}{3}$.

Численный ответ: $2,4944382578 \approx \frac{2\sqrt{14}}{3}$.

Билет №4

4.1 Тригонометрия (косинус)

1. Функция $y = \cos x$ и ее свойства.

Рассмотрим единичную окружность C в декартовой системе координат, центр A которой совпадает с точкой начала координат.

Всякий угол α можно рассматривать как поворот от положительного направления оси абсцисс до некоторого луча AB , при этом направление поворота против часовой стрелки считается положительным, а по часовой стрелке — отрицательным. Абсциссу обозначим x_B (см. рис. 10). Тогда косинусом α называется $\cos \alpha = x_B$.

Свойства косинуса:

(a) $D(\cos) = \mathbb{R}$.

(b) $E(\cos) = [-1; 1]$.

(c) Периодическая функция с периодом $T = 2\pi$.

(d) Четная функция.

(e) $\cos x > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ со сдвигами на $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

(f) $\cos x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ со сдвигами на $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

(g) $\cos x \nearrow$ при $x \in [\pi; 2\pi]$ со сдвигами на $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

(h) $\cos x \searrow$ при $x \in [0; \pi]$ со сдвигами на $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

2. Решение уравнения $\cos x = a$.

$$x = \begin{cases} 2\pi k - \arccos a, \\ \arccos a + 2\pi k \end{cases} \quad \text{для } k \in \mathbb{Z}. \quad (28)$$

3. Задача. Решить уравнение $(1 + \cos x) \operatorname{ctg} x = \sin(2x)$.

$$\{\sin x \neq 0, (1 + \cos x) \cos x = \sin(2x)\} \quad (29)$$

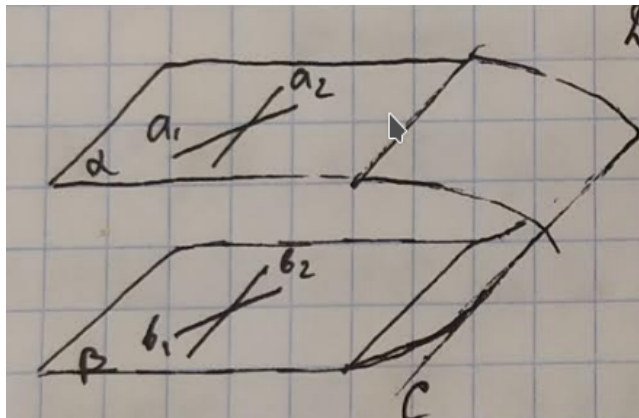


Рис. 13: Чертеж к доказательству

4.2 Стереометрия (параллельность двух плоскостей)

1. Определение и признак параллельности двух плоскостей.

Две плоскости параллельны, если не имеют общих точек.

Признак параллельности двух плоскостей: $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow 2$ пересекающиеся прямые плоскости α соответственно параллельны двум пересекающимся прямым β .

Доказательство:

См. рис. 13

Докажем от противного: пусть $\alpha \not\parallel \beta$, но $a_1 \parallel b_1$ и $b_2 \parallel a_2$.

Пусть также α пересекаются с β по некоторой прямой c .

Далее заметим, что

$$a_1 \parallel b_1 \Rightarrow a_1 \parallel \beta; \quad (30)$$

$$a_2 \parallel b_2 \Rightarrow a_2 \parallel \beta. \quad (31)$$

$c \in \alpha \Rightarrow a_1$ или a_2 пересекают $c \Rightarrow$ имеют с ней общую точку, однако $c \in \beta$, $\beta \parallel a_1$, $\beta \parallel a_2$ — противоречие, а значит, $\alpha \parallel \beta$, ч. т. д..

2. Задача. В правильной 4-угольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 6. Точки K , L , M и N — середины ребер AB , AD , AS , и CS соответственно. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку M параллельно плоскости KLN .

Билет №5

5.1 Алгебра (уравнение, равносильные преобразования)

1. Уравнения, решение уравнения.

Уравнение — равенство значений двух функций от одного и того же значения аргумента:

$$f(x) = g(x), \quad (32)$$

где f и g — некоторые числовые функции.

Уравнение считается решенным, если известны все x , при которых равенство истинно, или доказано отсутствие таких значений.

2. Равносильные уравнения, уравнения следствия.

Равносильными называются те уравнения, множества корней которых равны.

Если множество корней некоторого уравнения является надмножеством множества корней другого, то оно является его уравнением следствия.

3. Равносильные преобразования уравнений.

(а) Перенос членов уравнения из одной части в другую с противоположными знаками.

(b) Умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же отличное от 0 число или выражение.

4. Задача. Решить уравнение $\sqrt{4 + 2x - x^2} = x - 2$.

$$\sqrt{4 + 2x - x^2} = x - 2; \quad (33)$$

$$4 + 2x - x^2 = x^2 - 4x + 4 \text{ и } x - 2 \geq 0; \quad (34)$$

$$0 = 2x^2 - 6x \text{ и } x \in [2; \infty); \quad (35)$$

$$0 = x(2x - 6) \text{ и } x \in [2; \infty); \quad (36)$$

$$x = 3. \quad (37)$$

5.2 Стереометрия (перпендикулярность прямой и плоскости)

1. Определение перпендикулярности прямой и плоскости.

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна каждой прямой, лежащей в этой плоскости.

2. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна плоскости.

Доказательство:

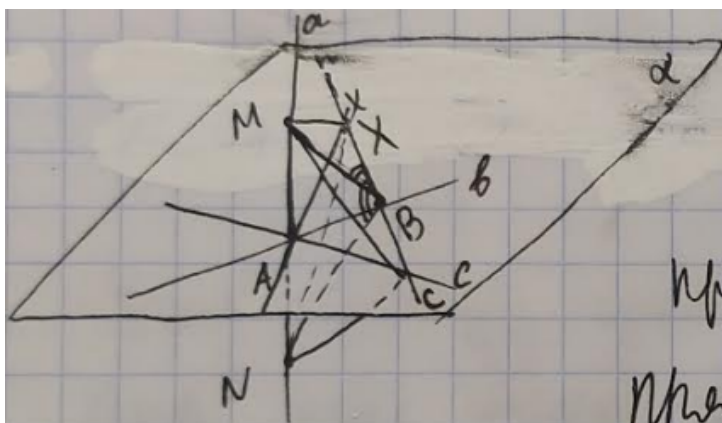


Рис. 14: Чертеж к доказательству

См. рис. 14.

Пусть $a \perp b$ и $c \perp d$.

Докажем, что a перпендикулярна всем прямым, лежащим в α .

Проведем произвольную прямую x через точку A .

Прямая x не пересекает A и пересекает x, b, c через точки X, B, C соответственно.

Отложим на a $AM = AN$ от точки A .

$\triangle MNC$ — равнобедренный; $\triangle MBN$ — равнобедренный, т. к. AC и AB — медиана и высота.

$\triangle MBC = \triangle NBC$ по трем сторонам $\Rightarrow \angle NBX = \angle MBX \Rightarrow \triangle MBX = \triangle NBX \Rightarrow MX = NX \Rightarrow \triangle MXN$ — равнобедренный $\Rightarrow XA$ — высота $\Rightarrow x \perp a \Rightarrow a \perp \alpha$, ч. т. д..

3. Задача. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$: $AA_1 = 1 : 2$. Точка M — середина ребра CC_1 . Доказать, что прямая AM перпендикулярна плоскости $B_1 M D_1$.

См. рис. 15.

(a) Определим точки Y, X, Z как середины AA_1, BB_1, DD_1 соответственно.

(b) Пусть сторона квадрата $ABCD$ — x . Тогда из данного отношения $AA_1 = 2x$. Заметим также, что $ABCDXMYZ$ — это куб, т. к. $AY = \frac{2x}{2} = x$ и так далее.

(c) В $ABCDXMYZ$ диагональ $AM = x\sqrt{3}$.

(d) По теореме Пифагора $AB_1 = \sqrt{x^2 + (2x)^2} = x\sqrt{5}$. Аналогично, $AD_1 = x\sqrt{5}$.

(e) Рассмотрим квадрат $B_1 X M C_1$: диагональ $B_1 M = x\sqrt{2}$. Аналогично, в $D_1 C_1 M Z$: диагональ $D_1 M = x\sqrt{2}$.

- (f) $(x\sqrt{5})^2 = (x\sqrt{3})^2 + (x\sqrt{2})^2 \Rightarrow B_1A^2 = B_1M^2 + AM^2 \Rightarrow \triangle B_1MA$ — прямоугольный по теореме, обратной теореме Пифагора $\Rightarrow \angle B_1MA = 90^\circ$.
- (g) Аналогично, в $\triangle AD_1M$: $(x\sqrt{5})^2 = (x\sqrt{3})^2 + (x\sqrt{2})^2 \Rightarrow D_1^2 = D_1M^2 + AM^2 \Rightarrow \angle D_1MA = 90^\circ$.
- (h) По признаку перпендикулярности прямой и плоскости $\angle D_1MA = 90^\circ$, $\angle B_1MA = 90^\circ \Rightarrow AM \perp (B_1D_1M)$, ч. т. д.

Численно было получено, что угол между AM и (B_1D_1M) равен примерно 90° .

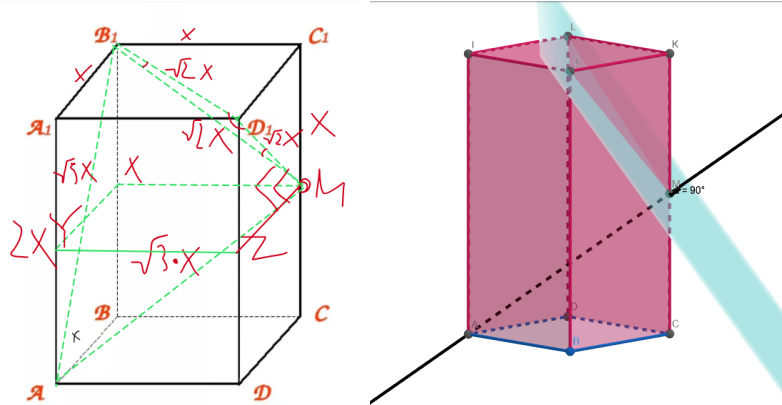


Рис. 15: Чертежи к решению

Билет №6

6.1 Тригонометрия (тангенс, котангенс)

1. Функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ и их свойства.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}. \quad (38)$$

Свойства тангенса:

- (a) $D(\operatorname{tg}) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \right\}$.
- (b) $E(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$.
- (c) Периодическая функция с периодом $T = \pi$.
- (d) Нечетная функция.
- (e) $\operatorname{tg} x = 0$ при $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
- (f) $\operatorname{tg} x > 0$ при $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
- (g) $\operatorname{tg} x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n \right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
- (h) $\operatorname{tg} x \nearrow$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Свойства котангенса:

- (a) $D(\operatorname{ctg}) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x}{\pi} \notin \mathbb{Z} \right\}$.
- (b) $E(\operatorname{ctg}) = \mathbb{R}$.
- (c) Периодическая функция с периодом $T = \pi$.
- (d) Нечетная функция.
- (e) $\operatorname{ctg} x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
- (f) $\operatorname{ctg} x > 0$ при $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

(g) $\operatorname{ctg} x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

(h) $\operatorname{ctg} x \searrow$ при $x \in (\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. Решение уравнения $\operatorname{tg} x = b$.

$$x = \operatorname{arctg} b + \pi n \text{ для } n \in \mathbb{Z}. \quad (39)$$

3. Задача. Решить уравнение $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg} x = 1$.

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg} x = 1. \quad (40)$$

6.2 Стереометрия (угол между наклонной и плоскостью, теорема о трех перпендикулярах)

1. Угол между наклонной и плоскостью.

Угол между наклонной и плоскостью равен углу между наклонной и ее проекцией.

2. Теорема о трех перпендикулярах.

Наклонная к плоскости перпендикулярна некоторой прямой в этой плоскости тогда и только тогда, когда ее проекция перпендикулярна этой прямой.

Доказательство:

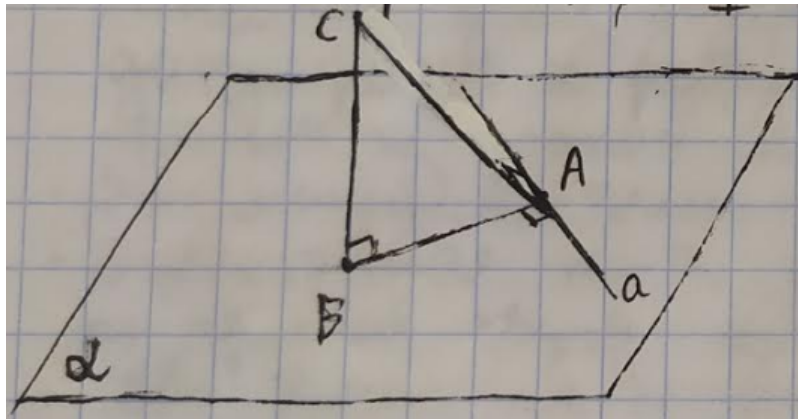


Рис. 16: Чертеж к доказательству

Пусть для лежащих в плоскости α прямых a и AB верно, что $a \perp AB, a \perp BC$. Докажем, что $a \perp AC$.

$a \perp AB, a \perp BC$, следовательно по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $a \perp \alpha$, отсюда следует, что a перпендикулярна любой прямой в плоскости (ABC) — в частности AC , ч. т. д..

Докажем обратную теорему, положив $a \perp AC$. BC — перпендикуляр к плоскости α , прямая BC перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости — в частности, прямой a . Таким образом, прямая a перпендикулярна двум пересекающимся прямым (ABC) (AC и BC). Согласно признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая a перпендикулярна плоскости (ABC) и, следовательно, любой прямой, лежащей в (ABC) — в частности, прямой AB .

3. Задача. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $AB = 2$, $AA_1 = 1$. Точка M — середина ребра B_1C_1 . Найти угол между прямой CM и плоскостью AA_1B_1B . См. рисунки 17

(a) Продолжим CM за точку M , получив точку D . $\triangle DB_1M \sim \triangle DBC \Rightarrow DB_1 = B_1B = 1 \Rightarrow CD = \sqrt{DB^2 + CB^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$

(b) Пусть CH — высота в $\triangle ABC$. Значит, $AH = BH \Rightarrow CH = \sqrt{3}$ и $AA_1B_1B \perp ABC \Rightarrow H$ — проекция C на $AA_1B_1B \Rightarrow CH \perp DH$

(c) Так как H — проекция $C \Rightarrow \angle HDC$ — искомый. Из $\triangle CDH \sin(\angle HDC) = \frac{CH}{DC} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

Ответ: $\angle DHC = \arcsin\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$

Численный ответ: $\angle DHC = 37,76124391^\circ$

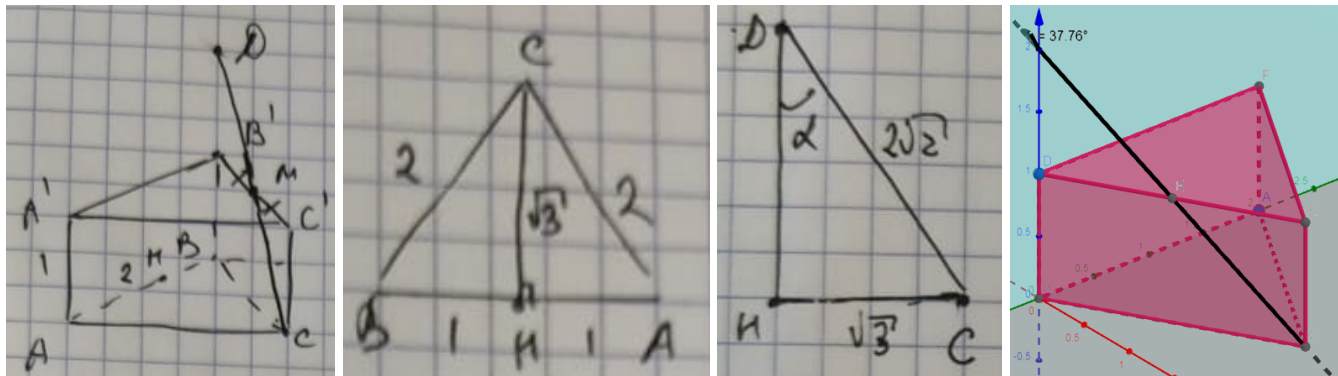


Рис. 17: Чертежи к решению

Билет №7

7.1 Тригонометрия (основное тригонометрическое тождество, синус суммы)

1. Основное тригонометрическое тождество.

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sin^2 x + \cos^2 x = 1. \quad (41)$$

Доказательство (см. рис. 18):

- $\forall x \in \mathbb{R} : \exists$ точка поворота на угол x на единичной окружности $P_x(\sin x, \cos x)$;
- $AC = \cos x$, $PC = \sin x$, $AP = 1$;
- По теореме Пифагора $AP^2 = PC^2 + AC^2 \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 x = 1$, ч. т. д..

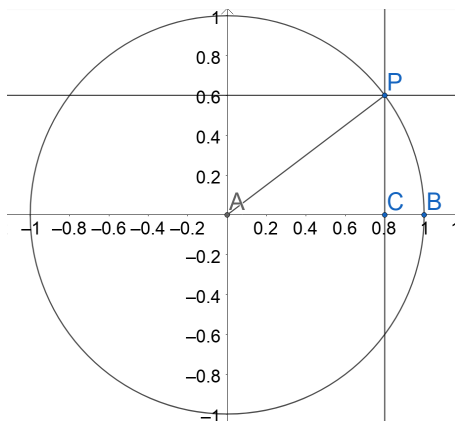


Рис. 18: Чертеж к доказательству

2. Вывод формулы $\sin(x + y)$.

Для использования доказательства ниже вам может потребоваться вывести формулу косинуса суммы из билета №8.

$$\sin(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a + b)\right) \quad (42)$$

$$= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) \quad (43)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b \quad (44)$$

$$= \sin a \cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b \quad (45)$$

$$= \sin a \cos b + \cos a \sin b. \quad (46)$$

3. Задача. Найти все решения уравнения $\frac{\sin 6x}{\sin x} = \frac{\cos 6x}{\cos x}$ на интервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\frac{\sin 6x}{\sin x} = \frac{\cos 6x}{\cos x}; \quad (47)$$

$$\begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0, \\ \sin(6x) \cos x = \cos(6x) \sin x; \end{cases} \quad (48)$$

$$\begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0, \\ \sin(6x - x) = 0; \end{cases} \quad (49)$$

$$\begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0, \\ \sin(5x) = 0; \end{cases} \quad (50)$$

$$x = \frac{n\pi}{5} \text{ для } n \in \mathbb{Z} \text{ и не } n:5. \quad (51)$$

Далее выбираем нужные корни из серии на данном интервале: $\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$.

Ответ: $\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$.

7.2 Стереометрия (двугранный угол)

1. Двугранный угол.

Двугранный угол — геометрическая фигура, образованная двумя полуплоскостями, исходящими из одной прямой.

2. Линейный угол двугранного угла.

Линейный угол двугранного угла — угол между двумя перпендикулярами к ребру двугранного угла, проведенными в его гранях из одной точки ребра.

3. Угол между плоскостями.

Угол между двумя плоскостями — наименьший из двугранных углов, образованных этими плоскостями.

4. Биссекторная плоскость двугранного угла.

Биссекторная плоскость двугранного угла — плоскость, проходящая через ребро двугранного угла и разделяющая его на два равных двугранных угла.

5. Свойство биссекторной плоскости.

6. Задача. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ ребро основания $AB = 5$, боковое ребро $SA = 3$. Найти двугранный угол при ребре SB . См. рисунки 19.

(а) Проведем высоты AH и CH в $\triangle ABS$ и $\triangle CBS$ соответственно. Поскольку $\triangle ABS = \triangle CBS$ (по трем сторонам) $\Rightarrow AH$ и CH придут в одну точку H .

(б) Найдем высоту AH из $\triangle ABS$: Проведем высоту SG . G — середина AB , т. к. ABS — равнобедренный треугольник. $SG = \sqrt{SB^2 - \frac{1}{4}AB^2} = \sqrt{3^2 - \frac{1}{4}5^2} = \sqrt{9 - \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$.

$$\text{Площадь } S_{\triangle ABS} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot SB = \frac{1}{2} \cdot SG \cdot AB.$$

$$AH = \frac{SG \cdot AB}{SB} = \frac{\frac{\sqrt{11}}{2} \cdot 5}{3} = \frac{5\sqrt{11}}{6} \quad (52)$$

(с) Аналогично для $\triangle CBS$ находим CH .

(д) Поскольку AH и CH — высоты, то $\angle AHC$ — искомый линейный угол двугранного угла при ребре SB . Из следствия теоремы косинусов для $\triangle AHC$:

$$\cos(\angle AHC) = \frac{AH^2 + HC^2 - AC^2}{2 \cdot AH \cdot CH} = \frac{2 \cdot \frac{25 \cdot 11}{36} - 25}{2 \cdot \frac{25 \cdot 11}{36}} = \frac{11 - 18}{11} = -\frac{7}{11} \Rightarrow \angle AHC \approx 129,5211964 \quad (53)$$

(е) Ответ: $\angle AHC = \arccos\left(-\frac{7}{11}\right)$

(ф) Численный ответ: $\angle AHC = 129,5211963586$

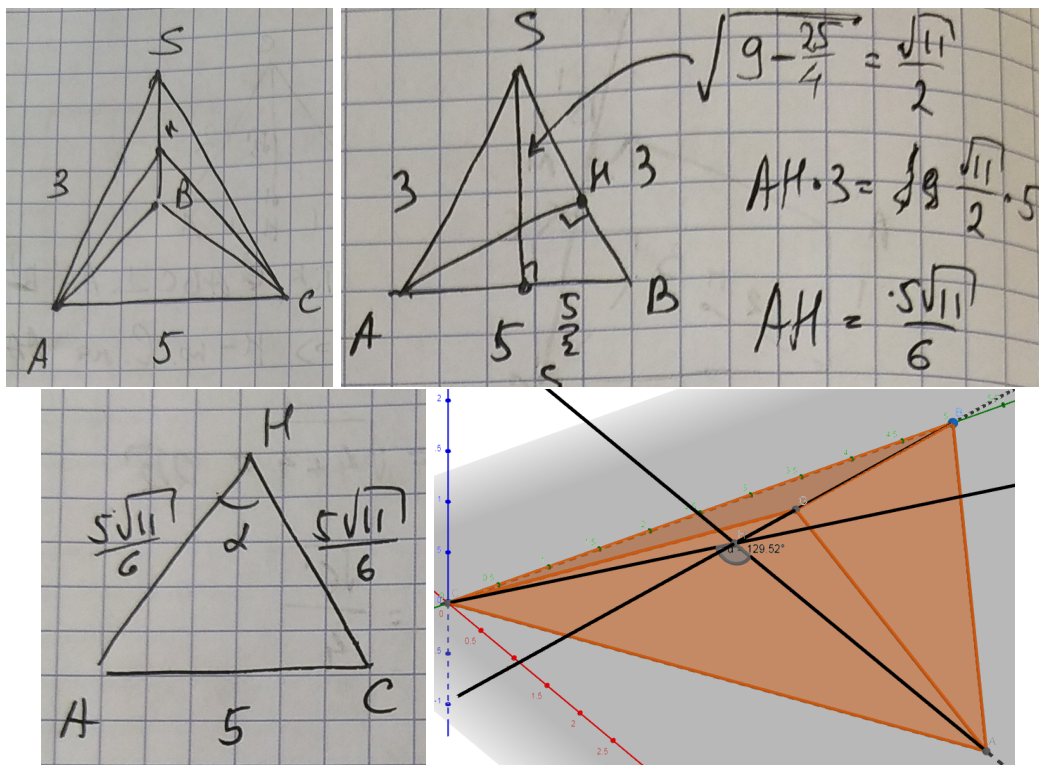


Рис. 19: Чертежи к решению

Билет №8

8.1 Тригонометрия (основное тригонометрическое тождество, косинус суммы)

1. Основное тригонометрическое тождество.

См. билет №7.

2. Вывод формулы $\cos(x + y)$.

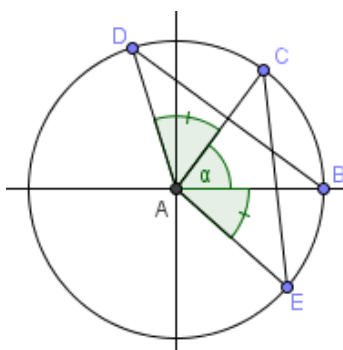


Рис. 20: Чертеж к доказательству

См. рис. 20.

Пусть AB , AC , AE и AD — радиусы единичной окружности с центром A .

Пусть $\angle BAC = \alpha$ и $\angle DAC = \angle BAE = \beta$.

Построим отрезки BD и CE . Очевидно, что $\angle DAB = \angle CAE$.

По признаку равенства треугольника по двум сторонам и углу между ними $\triangle DAB = \triangle CAE$.

Следовательно, $DB = CE$.

Определим декартовы координаты точек B , C , D и E :

$$B = (1; 0); \quad (54)$$

$$C = (\cos a; \sin a); \quad (55)$$

$$D = (\cos(a+b); \sin(a+b)); \quad (56)$$

$$E = (\cos b; -\sin b). \quad (57)$$

Пользуясь расстоянием в евклидовом пространстве, заметим, что

$$DB = CE \Leftrightarrow \rho(D, B) = \rho(C, E) \quad (58)$$

Подставляя координаты B, C, D, E , получаем:

$$(\cos(a+b) - 1)^2 + \sin^2(a+b) = (\cos a - \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2; \quad (59)$$

$$\cos^2(a+b) + \sin^2(a+b) - 2\cos(a+b) + 1 = (\cos a - \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2; \quad (60)$$

$$1 - 2\cos(a+b) + 1 = (\cos a - \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2; \quad (61)$$

$$2 - 2\cos(a+b) = \cos^2 a - 2\cos a \cos b + \cos^2 b + \sin^2 a + 2\sin a \sin b + \sin^2 b; \quad (62)$$

$$2 - 2\cos(a+b) = 2 - 2\cos a \cos b + 2\sin a \sin b; \quad (63)$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \quad (64)$$

3. *Задача.* Найти все решения уравнения $\frac{\sin 6x}{\cos x} = \frac{\cos 6x}{\sin x}$ на интервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

См. билет №7.

8.2 Стереометрия (скрещивающиеся прямые)

1. Скрещивающиеся прямые.

Скрещивающиеся прямые — прямые, которые не лежат в одной плоскости.

2. Признак скрещивающихся прямых.

Если одна прямая лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то они скрещиваются.

Доказательство:

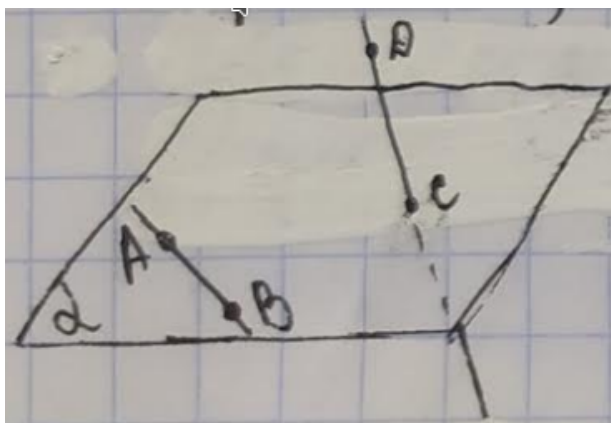


Рис. 21: Чертеж к доказательству

См. рис. 21.

Предположим, что прямые AB и CD не скрещиваются. Тогда существует такая плоскость β , в которой лежат AB и CD . Значит, в β лежат AB и C .

Через прямую и точку, не лежащую на ней проходит единственная плоскость α . Значит, β не может существовать, а AB и CD скрещиваются, ч. т. д..

3. Свойство скрещивающихся прямых.

Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

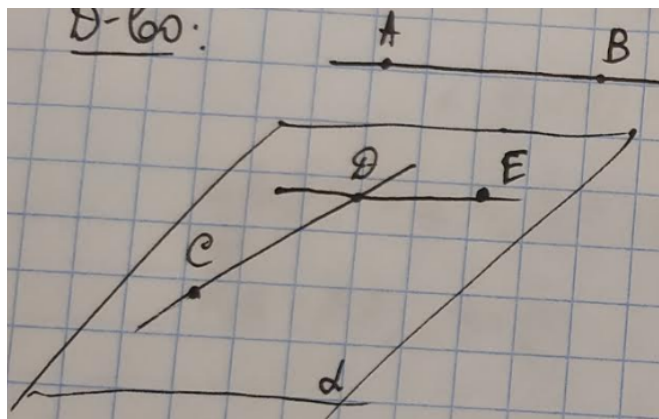


Рис. 22: Чертеж к доказательству

Доказательство:

См. рис. 22.

Рассмотрим скрещивающиеся прямые AB и CD .

Через точку D проведем прямую DE , параллельную AB .

Проведем плоскость α через CD и DE .

$DE \in \alpha$ и $DE \parallel AB \Rightarrow \alpha \parallel AB$.

Любая другая плоскость, проведенная через CD , будет пересекаться с DE и AB , которая ей параллельна.

4. Задача. В треугольной пирамиде $SABC$ ребра $AC = 5$, $AB = 2$, $AS = BS = \sqrt{17}$, высота CH треугольника ABC равна 4, угол между гранями ABC и ABS равен 60° . Найдите длину ребра SC .

Билет №9

9.1 Тригонометрия (синус, формулы двойного и тройного аргумента)

1. Определение функции $y = \sin x$.

См. билет №3.

2. Вывод формул двойного и тройного аргумента.

Синус двойного аргумента:

$$\sin(2x) = \sin(x + x) \quad (65)$$

$$= \sin x \cos x + \sin x \cos x \quad (66)$$

$$= 2 \sin x \cos x. \quad (67)$$

Косинус двойного аргумента:

$$\cos(2x) = \cos(x + x) \quad (68)$$

$$= \cos x \cos x - \sin x \sin x \quad (69)$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x. \quad (70)$$

Синус тройного аргумента:

$$\sin(3x) = \sin(2x + x) \quad (71)$$

$$= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x \quad (72)$$

$$= 2 \sin x \cos^2 x + \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) \quad (73)$$

$$= 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x. \quad (74)$$

Косинус тройного аргумента:

$$\cos(3x) = \cos(2x + x) \quad (75)$$

$$= \cos(2x) \cos x - \sin(2x) \sin x \quad (76)$$

$$= \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) - 2 \sin^2 x \cos x \quad (77)$$

$$= \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x. \quad (78)$$

3. Задача. Решить уравнение $\cos(2x) = \sin(3x)$.

$$\cos(2x) = \sin(3x); \quad (79)$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x; \quad (80)$$

$$1 - 2 \sin^2 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x; \quad (81)$$

$$4t^3 - 2t^2 - 3t + 1 = 0, \text{ при этом пусть } t = \sin x; \quad (82)$$

$$(4t^2 + 2t - 1)(t - 1) = 0; \quad (83)$$

$$t = \begin{cases} 1, \\ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}; \end{cases} \quad (84)$$

$$\sin x = \begin{cases} 1, \\ \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}, \\ \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}; \end{cases} \quad (85)$$

$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, \\ (-1)^n \arcsin \frac{1 + \sqrt{5}}{4} + \pi n \text{ для } n \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^n \arcsin \frac{1 - \sqrt{5}}{4} + \pi n \text{ для } n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (86)$$

9.2 Стереометрия (параллельность плоскостей)

1. Параллельность плоскостей.

Две плоскости называются параллельными, если не они пересекаются.

2. Свойства параллельных плоскостей.

3. Задача. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 12$ и $AD = 5\sqrt{3}$. Длины боковых ребер пирамиды $SA = 5$, $SB = 13$, $SD = 10$.

(а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

(б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .

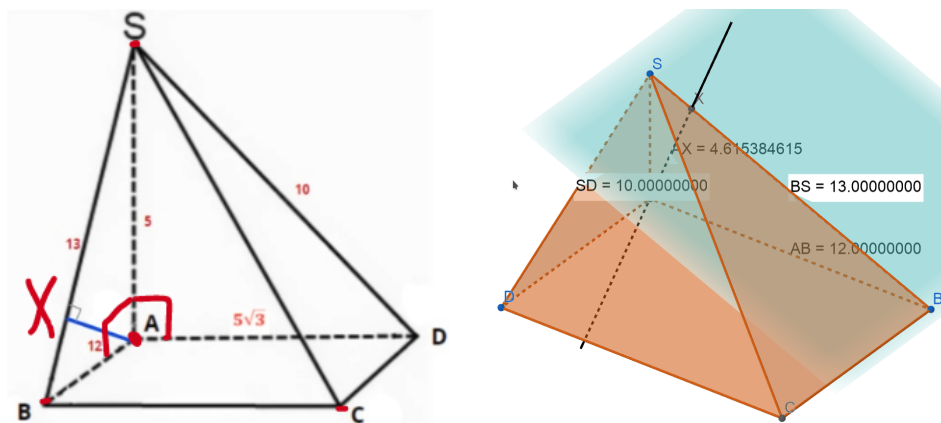


Рис. 23: Чертеж к решению

См. рис. 23.

(а) Рассмотрим $\triangle SAB$, $\triangle SAD$: они прямоугольные по теореме, обратной к теореме Пифагора: $100 = 3 \cdot 25 + 25$, $169 = 25 + 144$.

(б) Следовательно, $\angle SAD$, $\angle SAB$ — прямые.

(с) Отсюда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $SA \perp (ADB) \Rightarrow SA$ — высота, ч. т. д..

(а) Восстановим перпендикуляр из A к SB : AX .

(б) $AD \perp SAB$ по вышедоказанному.

(с) $AD \parallel BC$, т. к. это противоположные стороны прямоугольника.

(д) Следовательно, $BC \perp SAB$, потому что $AD \perp SAB$ из теоремы о двух параллельных прямых, перпендикулярных к плоскости.

- (е) И наконец, $AX \perp BC$ и $AX \perp SB$ (по построению) $\Rightarrow AX \perp SBC$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.
- (ф) Очевидно, что AX — высота в прямоугольном $\triangle ASB$.
- (г) $AX = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13}$.

Ответ: $\frac{60}{13}$.

Численный ответ: $4,615384615 \approx \frac{60}{13}$.

Билет №10

10.1 Теория чисел (натуральные числа, аксиомы Пеано)

1. Натуральные числа.

Натуральные числа — множество чисел $\mathbb{N}$, образующих натуральный ряд — систему $\langle \mathbb{N}, ' \rangle$, где $'$ — некоторая операция, которая записывается в виде $n = m'$, для которого при этом выполняются аксиомы Пеано.

2. Аксиомы Пеано.

1. $\exists 1 \in \mathbb{N} : \nexists x \in \mathbb{N} : x' = 1$;
2. $\forall x \in \mathbb{N} : \exists! x' \in \mathbb{N}$;
3. $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : b' = a \text{ и } c' = a \Rightarrow b = c$;
4. $\forall M \subseteq \mathbb{N} : 1 \in M \text{ и } (\forall n \in M : n' \in M) \Rightarrow M = \mathbb{N}$.

3. Доказательство независимости аксиом Пеано.

(а) Независимость аксиомы 1.

На множестве $\mathbb{N}_1 = \{1; 2; 3\}$ определим $'$, положив, что $1' = 2$, $2' = 3$, $3' = 1$ (рис. 24). Очевидно, что аксиома не выполняется, т. к. всякий элемент из $\mathbb{N}_1$ непосредственно следует за некоторым элементом этого множества. Остальные же аксиомы Пеано выполняются. Выполнимость аксиомы 4 следует из того, что в $\mathbb{N}_1$ нет подмножеств, содержащих элемент, который непосредственно не следовал бы ни за каким элементом.



Рис. 24: Иллюстрация множества. Стрелка обозначает отношение $'$

(b) Независимость аксиомы 2.

Аксиома 2 содержит два утверждения: о существовании непосредственно следующего элемента и его единственности. Установим независимость каждого из этих утверждений.

На множестве $\mathbb{N}_{21} = \{1; 2\}$ определим $1' = 2$ и рассмотрим систему $\langle \mathbb{N}_{21}, ' \rangle$. Первая часть аксиомы 2, а значит и вся система, не выполняется, а все остальные аксиомы Пеано выполняются.

Далее, пусть $\mathbb{N}_{22} = \{1; 2; 3; a_3; 4; a_4; \dots\}$. Положим $1' = 2, 2' = 3, 3' = 4, \dots, 2' = a_3, a_3' = a_4, \dots$ (рис. 25). Вторая часть аксиомы 2 не выполняется, а значит, и вся аксиома не выполняется, а все остальные выполняются.

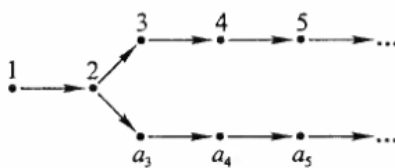


Рис. 25: Иллюстрация множества. Стрелка обозначает отношение $'$

(с) Независимость аксиомы 3.

Пусть $N_3 = \{1; 2; 3; 4\}$. Положим, $1' = 2$, $2' = 3$, $3' = 4$, $4' = 2$ (рис. 26). Очевидно, система $\langle N_3, ' \rangle$ не удовлетворяет аксиоме 3, но удовлетворяет остальным аксиомам Пеано.



Рис. 26: Иллюстрация множества. Стрелка обозначает отношение '

(d) Независимость аксиомы 4.

Пусть $N_4 = \{1; a_1; 2; a_2; a_3\}$. Определим $1' = 2$, $2' = 3$, ..., $a_1' = a_2$, $a_2' = a_3$, ... (рис. 27). Очевидно, система $\langle N_4, ' \rangle$ удовлетворяет первым трем аксиомам Пеано. Докажем, что аксиома 4 не выполняется. Рассмотрим подмножество $M = \{1; 2; 3; \dots\} \subseteq N_4$. Имеем $1 \in M$; если $n \in M$, то $n' \in M$; однако $M \neq N$.

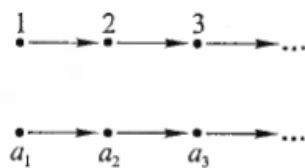


Рис. 27: Иллюстрация множества. Стрелка обозначает отношение '

4. Задача. Доказать, что число $n^3 - 7n$ делится на 6.

$$n^3 - 7n = n(n^2 - 7); \quad (87)$$

$$n \equiv n \pmod{6}, n^2 - 7 \equiv n^2 - 1 \pmod{6}; \quad (88)$$

$$n^3 - 7n \equiv n(n-1)(n+1) \pmod{6} \Rightarrow n^3 - 7n \div 6. \quad (89)$$

10.2 Стереометрия (перпендикулярность плоскостей)

1. Перпендикулярность плоскостей.

Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90° .

2. Признак перпендикулярности плоскостей.

Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Доказательство:

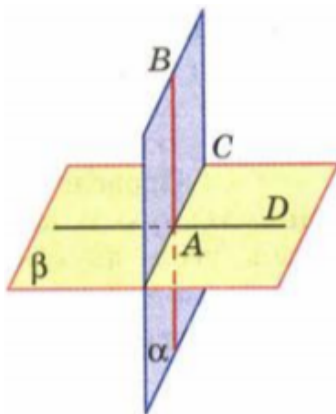


Рис. 28: Иллюстрация доказательства

Рассмотрим плоскости α и β такие, что плоскость α проходит через прямую AB , перпендикулярную к плоскости β и пересекающуюся с ней в точке A (рис. 28). Докажем, что $\alpha \perp \beta$. Плоскости α и β пересекаются по

некоторой прямой AC , причем $AB \perp AC$, так как по условию $AB \perp \beta$, т. е. прямая AB перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости β .

Проведем в плоскости β прямую AD , перпендикулярную к прямой AC . Тогда $\angle BAD$ — линейный угол двугранного угла, образованного при пересечении плоскостей α и β . Но $\angle BAD = 90^\circ$ (так как $AB \perp \beta$). Следовательно, угол между плоскостями α и β равен 90° , т. е. $\alpha \perp \beta$. Теорема доказана.

3. *Задача. В правильной 4-угольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 1. Точки M и N — середины ребер SD и SC соответственно. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую AM и перпендикулярную плоскости BND , и определить, в каком отношении эта плоскость делит ребро CD .*

Билет №11

11.1 Теория чисел (НОД, алгоритм Евклида)

1. НОД целых чисел.

Сначала определим понятие общего делителя:

α — общий делитель a, b тогда и только тогда, когда $\alpha \mid a$ и $\alpha \mid b$.

Если множество общих делителей двух чисел ограничено сверху, то существует его точная верхняя граница, которая обозначается как $\text{НОД}(a, b)$.

2. Алгоритм Евклида для нахождения НОД целых чисел.

$\alpha = (a, b) \Rightarrow \alpha = (a, |b|)$, где $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$.

Алгоритм:

(а) Разделим a на b с остатком: $a = bq + r_1$; если $r_1 = 0$, то $(a, b) = b$, если $r_1 > 0$, то сл. шаг.

(б) Делим b на r_1 с остатком: $b = r_1q_1 + r_2$; если $r_2 = 0$, $(a, b) = (b, r_1) = r_1$ и так далее.

Докажем конечность алгоритма:

$$a = bq_1 + r_1; \quad (90)$$

$$b = r_1q_2 + r_2; \quad (91)$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3; \quad (92)$$

$$r_{n-1} = r_nq_{n+1} + r_{n+1}; \quad (93)$$

так как $b > r_1 > r_2 > \dots > r_n$, то не более чем через n шагов получим остаток 0.

3. Теорема о существовании решения уравнения $ax + by = (a, b)$.

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : \exists x, y \in \mathbb{Z} : (a, b) = ax + by. \quad (94)$$

Выпишем алгоритм Евклида для нахождения (a, b) .

Рассматривая его с конечных итераций, получим:

$$(a, b) = r_n = r_{n-2} - r_{n-1}q_n = r_{n-2}A \quad (95)$$

Доказательство:

4. *Задача. Найти НОД чисел (100001, 9999).*

Пусть $100001 = ax$; $9999 = bx$; $a, b, x \in \mathbb{N}$. x — искомый делитель.

$(a - b)x \in \mathbb{N}$, $(a - b)x = 2 \Rightarrow x \geq 1$, $(a - b) \geq 1 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow x \in \{1; 2\}$, но 2 — не делитель $\Rightarrow \text{НОД}(100001; 9999) = 1$.

11.2 Стереометрия (расстояние между множествами точек, между скрещивающимися прямыми)

1. Понятие расстояния между множествами точек.

Если среди всех расстояний между точками, одна из которых принадлежит множеству A , а другая — множеству B , существует наименьшее, то его называют расстоянием между этими множествами точек.

2. Расстояние между скрещивающимися прямыми и методы его нахождения.

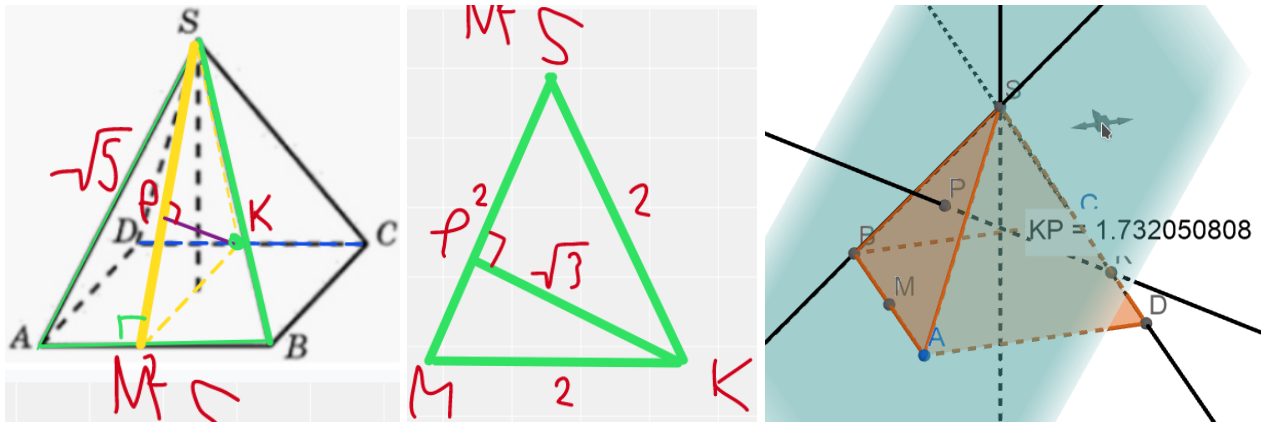


Рис. 29: Иллюстрация доказательства

3. Задача. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ $AB = 2$, $AS = 5$. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми BS и CD .

См. рис. 29.

- (a) $CD \parallel AB \Rightarrow SAB \parallel CD$ по признаку параллельности прямой и плоскости.
- (b) $SKM \perp AB$, так как $AB \perp SK$ и $AB \perp MK$.
- (c) $CD \perp SKM$, так как $CD \parallel AB$ и $CD \perp MK$.
- (d) $SKM \perp SAB$.
- (e) $KP \perp SM$ по построению.
- (f) $KP \perp AB$, так как $AB \perp SMK$.
- (g) $KP \perp SAB$, и, следовательно, является искомым отрезком.
- (h) $SM = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4SA^2 - AB^2} = 2$.
- (i) $SK = SM = 2$.
- (j) $MK = AB = 2$.
- (k) AMK — равносторонний.
- (l) $KP = \frac{\sqrt{3}}{2} MK = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$. Численный ответ: $1,732050808 \approx \sqrt{3}$.

Билет №12

12.1 Теория чисел (делимость)

1. Делимость целых чисел.

Модуль целого числа:

$$\forall a \in \mathbb{Z} : |a| = \max(a, -a). \quad (96)$$

Делимость целого числа:

$$a : b \Leftrightarrow b \setminus a \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : a = b \cdot c \quad (97)$$

2. Свойства делимости.

- (a) Рефлексивность: $a \setminus a$.
- (b) $b \setminus a$ и $a \setminus b \Rightarrow a = |b|$.
- (c) Транзитивность: $b \setminus a$ и $a \setminus c \Rightarrow b \setminus c$.
- (d) $b \setminus c$ и $a \setminus c \Rightarrow b \setminus ax + by, \forall x, y \in \mathbb{Z}$.

(е) $b \setminus a$ и $|b| > |a| \Rightarrow a = 0$.

Доказательство:

3. Теорема о делимости с остатком.

$$\forall A \in \mathbb{Z} : a = bq + r, 0 \leq r < b. \quad (98)$$

Доказательство:

4. *Задача. Доказать, что остаток от деления простого числа на 30 — то же простое число, либо 1.*

Пусть p — простое число.

Тогда из определения деления с остатком

$$p = 30k + r, \text{ где } k, r \in \mathbb{N}. \quad (99)$$

Очевидно, что r строго меньше 30. Также r не может быть кратен 2, 3, 5 — делителям 30.

Итого $r \in \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$. Все эти числа — простые или равны 1.

12.2 Стереометрия (расстояния между множествами точек, точкой и прямой, точкой и плоскостью)

1. Понятие расстояния между множествами точек.

См. билет №11.

2. Расстояние от точки до прямой.

Расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую, потому что его длина как катета будет всегда меньше, чем гипотенузы — в прямоугольном треугольнике, образованном перпендикуляром и любой наклонной, проведенной из точки к прямой.

3. Расстояние от точки до плоскости.

Расстояние от точки до плоскости — длина перпендикуляра, опущенного из заданной точки к заданной плоскости.

Это выводится аналогично — через прямоугольные треугольники, образуемые этим перпендикуляром.

4. *Задача. Ребро куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ равно 1, точка M — середина ребра AD . Через середину N отрезка B_1M перпендикулярно B_1M проведена плоскость α . Найти расстояние от центра куба до плоскости α .*

См. рисунок 30.

(а) По условию $N \in \alpha$, B_1M .

(б) Пусть O — центр куба, а H — точка пересечения α с перпендикуляром, опущенным к ней из O , тогда искомая величина $\rho(O; \alpha) = OH$.

(с) Рассмотрим плоскость (B_1MD) . Плоскость α перпендикулярна прямой B_1M , так что и (B_1MD) тоже.

(d) Рассмотрим $\triangle DMB_1$: $B_1D = \frac{3}{2}$, $B_1D = \frac{3}{\sqrt{3}}$, $DM = \frac{1}{2}$.

(е) Теорема косинусов для $\angle DMB_1$:

$$3 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} - 2 \cos(\angle DMB_1) \cdot \frac{3}{4}, \quad (100)$$

$$\text{отсюда } \cos(\angle DMB_1) = -\frac{1}{3}.$$

(f) $\sin(\angle DMB_1 - 90^\circ) = -\cos(\angle DMB_1) = \frac{1}{3} = \sin(\angle ONH)$.

(g) $OH = ON \cdot \sin(\angle ONH) = \frac{1}{12}$.

Ответ: $\frac{1}{12}$.

Численный ответ: $0,0833333333 \approx \frac{1}{12}$.

Билет №13

Счастливым билет — можно выбрать любой другой. Рекомендуем №5.

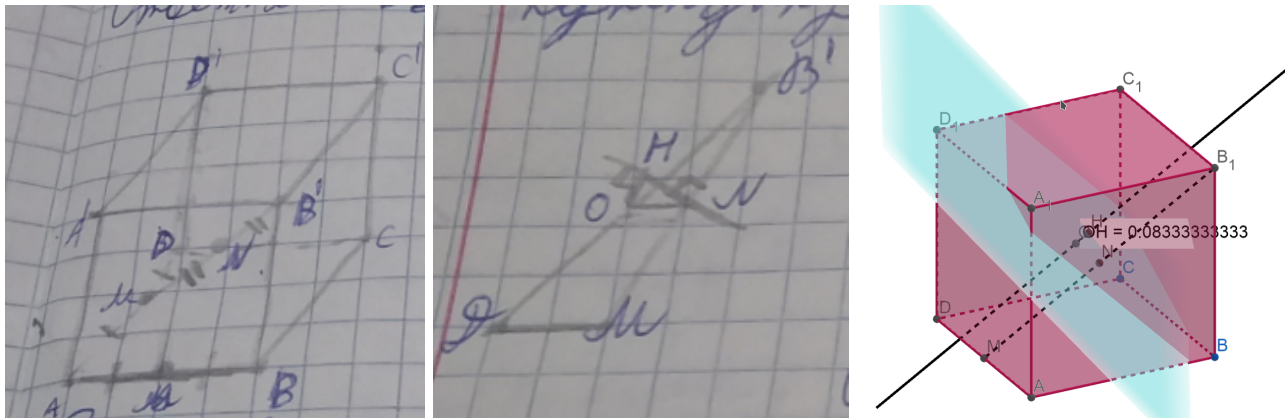


Рис. 30: Чертежи к решению

Билет №14

14.1 Теория чисел (сравнение по модулю)

1. Сравнение целых чисел по модулю.
 a сравнимо с b по модулю m , если и только если при делении на m .
2. Свойства сравнений.
3. Задача. Доказать, что число $30^{30} - 1$ делится на 31.

$$30 \equiv -1 \pmod{31} \Rightarrow 30^{30} \equiv 1 \pmod{31} \Rightarrow 30^{30} - 1 \equiv 0 \pmod{31} \Rightarrow 30^{30} - 1 \vdots 31. \quad (101)$$

14.2 Стереометрия (двугранный угол)

1. Двугранный угол.
См. билет №7.
2. Линейный угол двугранного угла.
См. билет №7.
3. Доказать, что $S_{\text{пр}} = S \cos \phi$, где ϕ — угол между плоскостью многоугольника и плоскостью его проекции.
4. Задача. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA'B'C'$ служит треугольник ABC , в котором $AB = a$, $AC = 2a$, $\angle BAC = 120^\circ$. Высота призмы равна a . Найти площадь сечения призмы плоскостью, которая делит пополам двугранный угол при ребре AB .

Билет №15

15.1 Теория чисел (сравнение по модулю, малая теорема Ферма)

1. Сравнение целых чисел по модулю.
См. билет №14.
2. Малая теорема Ферма.
Если p — простое число и a — целое число, не делящееся на p , то $a^{p-1} - 1$ делится на p .
Доказательство:
3. Задача. Найти остаток от деления 3^{102} на 101.
Из следствия малой теоремы Ферма:

$$3^{101} \equiv 3 \pmod{101} \Rightarrow 3^{102} \equiv 9 \pmod{101}. \quad (102)$$

Ответ: 9.

15.2 Стереометрия (проекция точки, фигуры на плоскость)

1. Проекция точки на плоскость.

Проекцией какой-нибудь точки на данную плоскость называется основание перпендикуляра, опущенного на эту плоскость из взятой точки.

2. Проекция фигуры на плоскость.

3. Построение проекции точки на плоскость.

4. Задача. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно $\sqrt{6}$. Найти длину проекции ребра $A_1 B_1$ на плоскость $BC_1 D$.

Билет №16

16.1 Матанализ (предел последовательность, свойства сходящихся последовательностей)

1. Предел последовательности.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon, \exists N_0(\varepsilon) : \forall n > N_0, |x_n - a| < \varepsilon. \quad (103)$$

2. Свойства сходящихся последовательностей ($a_n, b_n \dots$ сходятся).

- (a) $\exists! A : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ (предел уникален).

В. В. разрешил не доказывать.

- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

В. В. разрешил не доказывать.

- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$.

В. В. разрешил не доказывать.

- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{A}{B}$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$.

Доказательство:

$$\forall \varepsilon > 0, \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} \right| = \left| \frac{a_n B - b_n A}{b_n B} \right| = \frac{|a_n B - AB + AB - b_n A|}{|b_n| |B|} \leq \frac{|B| |b_n - A| + |A| |b_n - B|}{|y_n| |B|} < \varepsilon. \quad (104)$$

- (e) $y_n \leq x_n \leq z_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ (лемма о двух милиционерах).

Доказательство:

Пользуясь свойствами модулей, отметим:

$$|x - l| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < x < l + \varepsilon \quad (105)$$

Возьмем некоторый $\varepsilon > 0$. Для него нужно доказать, что:

$$\exists N : \forall n > N : |x_n - l| < \varepsilon \quad (106)$$

Из $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l$ известно, что

$$\exists N_1 : \forall n > N_1 : |y_n - l| < \varepsilon \quad (107)$$

Аналогично, из $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l$ понятно, что

$$\exists N_2 : \forall n > N_2 : |z_n - l| < \varepsilon \quad (108)$$

Пусть $N = \max(N_1, N_2)$.

Поэтому если $n > N$, то и $n > N_1$, и $n > N_2$, т. е.

$$\forall n > N : l - \varepsilon < y_n < l + \varepsilon \quad (109)$$

$$\forall n > N : l - \varepsilon < z_n < l + \varepsilon \quad (110)$$

Однако

$$\forall n \in \mathbb{N} : y_n \leq x_n \leq z_n \quad (111)$$

Так

$$\forall n > N : l - \varepsilon < y_n \leq x_n \leq z_n < l + \varepsilon \quad (112)$$

и

$$\forall n > N : l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon \quad (113)$$

То есть

$$\forall n > N : |x_n - l| < \varepsilon \quad (114)$$

ч. т. д..

3. *Задача. Исходя из определения предела, доказать, что последовательность $x_n = (\sin n + \cos n) / \sqrt{n}$ имеет предел.*

Гипотеза: последовательность $(\sin n + \cos n) / \sqrt{n}$ имеет предел, и он равен 0.

Доказательство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sin n + \cos n)}{\sqrt{n}} = 0 \Leftrightarrow \quad (115)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon, \exists N_0(\varepsilon) : \forall n > N_0(\varepsilon), \left| \frac{\sin n + \cos n}{\sqrt{n}} \right| < \frac{3}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{9}{\varepsilon^2}, N_0 = \left[\frac{9}{\varepsilon^2} \right] + 1. \quad (116)$$

16.2 Стереометрия (двугранный угол)

1. Двугранный угол.

См. билет №7.

2. Линейный угол двугранного угла.

См. билет №7.

3. Угол между плоскостями.

См. билет №7.

4. Свойство биссекторной плоскости двугранного угла.

См. билет №7.

5. *Задача. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ ребро основания $AB = 5$, боковое ребро $SA = 3$. Найти двугранный угол при ребре SB .*

См. билет №7.

Билет №17

17.1 Матанализ (существование предела монотонной ограниченной последовательности)

1. Теорема Вейерштрасса о существовании предела монотонной ограниченной последовательности.

Если последовательность ограниченная и монотонная, то она сходящаяся.

Доказательство для возрастающей ограниченной последовательности:

Пусть x_n — ограниченная возрастающая последовательность. Тогда множество $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ограничено, следовательно, по теореме о супремуме (*Не доказано?*), имеет супремум. Обозначим его через S . Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = S$.

Действительно, т. к. S — супремум множества $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что $S - \varepsilon < x_N \leq S$. Тогда для любого $n > N$ имеем: $S - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq S < S + \varepsilon$. Тогда $|x_n - S| < \varepsilon$ при $n > N$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = S$. Теорема доказана.

В. В. разрешил не доказывать для ограниченной монотонно убывающей последовательности.

2. *Задача. Доказать, что последовательность заданная рекуррентно: $a_1 = 2, a_{n+1} = (a_n + 1) / 2$, имеет предел и найти его.*

Докажем ограниченность снизу, монотонность a_n :

- (а) Утверждение индукции: a_n ограничена снизу — $\forall n : a_n > 1$ и a_n монотонно убывает — $\forall n : a_{n+1} < a_n$.
- (б) База индукции: $1 < a_2 = \frac{3}{2} < a_1 = 2$; $a_2 < a_1$, $\frac{3}{2} < 2$.
- (с) Переход индукции: от противного.
- i. Пусть $a_n > 1$, $a_{n+1} \leq 1$. Тогда

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2} \Rightarrow 2a_{n+1} = a_n + 1; \quad (117)$$

$$2a_{n+1} \leq 2; \quad (118)$$

$$a_n + 1 > 2; \quad (119)$$

$$2 < 2 — \text{противоречие.} \quad (120)$$

- ii. Пусть $a_n \leq a_{n+1}$, $a_n > 1$, $a_{n+1} > 1$, тогда

$$2a_{n+1} = a_n + 1; \quad (121)$$

$$a_{n+1} \geq a_n; \quad (122)$$

$$a_{n+1} > 1; \quad (123)$$

$$2a_{n+1} > a_n + 1 — \text{противоречие.} \quad (124)$$

a_n монотонно убывает, так что ее верхняя граница — 2.

Следовательно, x_n — сходящаяся последовательность по теореме Вейерштрасса.

Т. к. a_n сходится, определим $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ как C , при этом:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}; \quad (125)$$

$$C = \frac{C + 1}{2}; \quad (126)$$

$$C = 1. \quad (127)$$

Ответ: 1.

17.2 Стереометрия (наклонная, ее проекция на плоскость)

1. Наклонная к плоскости.

Прямая, пересекающая плоскость, но не перпендикулярная к ней, называется наклонной к этой плоскости.

2. Проекция наклонной на плоскость.

3. Теорема. Угол между наклонной к плоскости и ее проекцией на эту плоскость есть наименьший из углов между наклонной и любой прямой, лежащей в этой плоскости.

4. Задача. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ $AB = 8\sqrt{2}$, высота $H = 6$, M — середина ребра SD , K — середина ребра CD . На прямой MK выбирается произвольная точка P . Найти наименьшую возможную величину угла PBD .

Билет №18

18.1 Матанализ (предел функции, первый замечательный предел)

1. Определение предела функции.

a — точка сгущения множества X , если в любой близости от a содержатся значения x из X , отличные от a .

Окрестность a — любой открытый промежуток $(a - \delta; a + \delta)$ с центром в точке a .

Точка a — точка сгущения множества X , если в каждой ее окрестности содержатся отличные от a значения x из X .

Пусть в некоторой области X , для которой a является точкой сгущения, задана некоторая функция $f(x)$.

$f(x)$ имеет пределом число A при стремлении x к a (или в точке a), если:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |f(x) - A| < \varepsilon, \text{ лишь только } |x - a| < \delta. \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A. \quad (128)$$

2. Односторонние пределы.

Если X такова, что в любой близости от a , но справа от a найдутся отличные от a значения x из X (т. е., a — правая точка сгущения X), можно специализировать предел функции, ограничившись лишь значениями $x > a$. В этом случае предел функции, если он существует, называется пределом справа и обозначается как

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x). \quad (129)$$

Аналогично устанавливается понятие о левой точке сгущения и предела слева:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x). \quad (130)$$

3. Первый замечательный предел.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (131)$$

Доказательство:

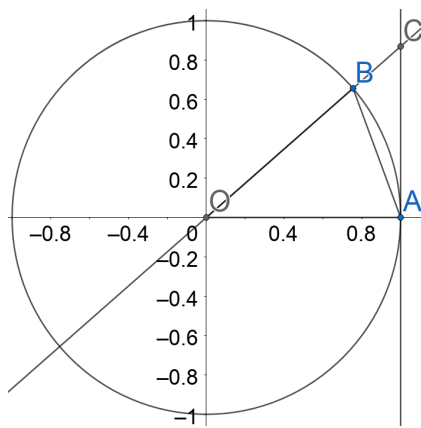


Рис. 31: Чертеж к доказательству

См. рис. 31.

Пусть $\theta = \angle AOB$ — угол единичной окружности, радианная мера которого принадлежит интервалу $(0; \frac{\pi}{2})$.

Определим следующие точки:

$$O = (0; 0), \quad (132)$$

$$A = (1; 0), \quad (133)$$

$$B = (\cos \theta; \sin \theta), \quad (134)$$

$$C = (1; \operatorname{tg} \theta). \quad (135)$$

По площади треугольника через сторону и высоту, проведенную к ней, имеем, что $\triangle OAB$ имеет площадь

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \sin \theta. \quad (136)$$

Площадь сектора единичной окружности, образованный дугой, стянутой хордой AB , равен $\frac{\theta}{2}$.

Очевидно, что этот сектор не может иметь меньшую площадь, чем $\triangle OAB$, откуда имеем неравенство:

$$\forall \theta \in (0; \frac{\pi}{2}) : \frac{\sin \theta}{2} \leq \frac{\theta}{2}. \quad (137)$$

Далее по площади треугольника через сторону и проведенную к ней высоту имеем, что $\triangle OAC$ имеет площадь

$$S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta. \quad (138)$$

Очевидно, что $\triangle OAC$ не меньше сектора, откуда имеем неравенство:

$$\forall \theta \in (0; \frac{\pi}{2}) : \frac{1}{2} \sin \theta \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta. \quad (139)$$

Если отразить эти построения относительно оси X , соотношения будут обозначенных областей будут неизменны.

Если взять модуль всех частей, то неравенство 139 будет соблюдаться и в квадранте IV:

$$\forall \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right): \quad (140)$$

$$\left|\frac{1}{2} \sin \theta\right| \leq \left|\frac{1}{2} \theta\right| \leq \left|\frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta\right| \quad (141)$$

$$\frac{1}{2} |\sin \theta| \leq \frac{1}{2} |\theta| \leq \frac{1}{2} |\operatorname{tg} \theta| \quad (142)$$

$$1 \leq \frac{|\theta|}{|\sin \theta|} \leq \frac{1}{|\cos \theta|} \quad (143)$$

$$1 \leq \left|\frac{\theta}{\sin \theta}\right| \leq \left|\frac{1}{\cos \theta}\right|. \quad (144)$$

Итого, имеем $\frac{\theta}{\sin \theta} \geq 0$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, а также $\frac{1}{\cos \theta} \geq 0$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Поэтому знаки модуля не нужны, и получаем:

$$\forall \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right): 1 \leq \frac{\theta}{\sin \theta} \leq \frac{1}{\cos \theta}. \quad (145)$$

Заменяя все части на противоположные по знаку и обращая неравенства, получаем:

$$\forall \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right): 1 \geq \frac{\sin \theta}{\theta} \geq \cos \theta. \quad (146)$$

Найдем следующие пределы:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} 1 = 1, \quad (147)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1. \quad (148)$$

Поэтому по лемме о двух милиционерах

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1, \quad (149)$$

ч. т. д..

4. *Задача. Найдите* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x} \quad (150)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4x^3 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cos x} \quad (151)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{\cos x} \right) \quad (152)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1^2 \cdot 1 \quad (153)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (154)$$

18.2 Стереометрия (трехгранный угол, теорема о плоских угла трехгранного угла)

1. Трехгранный угол.

Трехгранный угол (см. рис 32) — геометрическая фигура, образованная тремя лучами, исходящими из одной точки.

2. Теорема о плоских углах трехгранного угла.

В трехгранном угле каждый плоский угол меньше суммы двух других плоских углов.

Доказательство:

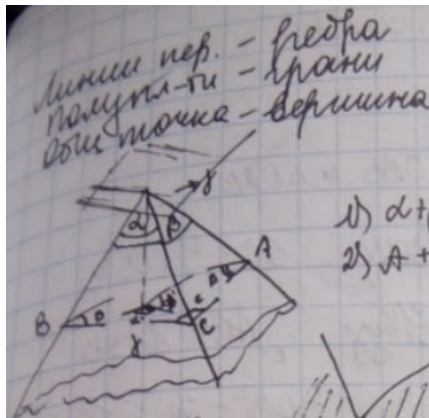


Рис. 32: Иллюстрация определения с подписанными частями угла

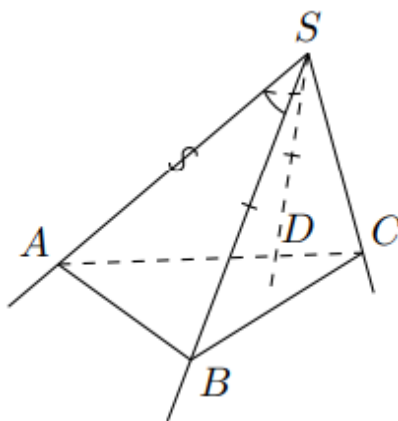


Рис. 33: Чертеж к доказательству

Пусть в трёхгранном угле $SABC$ (рис. 33) наибольший из плоских углов есть угол $\angle ASC$. Отложим на этом угле угол $\angle ASD$, равный углу $\angle ASB$, и проведём какую-нибудь прямую AC , пересекающую SD в некоторой точке D . Отложим $SB = SD$.

Соединив B с A и C , получим $\triangle ABC$, в котором

$$AD + DC < AB + BC. \quad (155)$$

Треугольники $\triangle ASD$ и $\triangle ASB$ равны, так как они содержат по равному углу, заключённому между равными сторонами; следовательно, $AD = AB$. Поэтому если в выведенном неравенстве отбросить равные слагаемые AD и AB , получим, что $DC < BC$. Теперь замечаем, что у треугольников $\triangle SCD$ и $\triangle SCB$ две стороны одного равны двум сторонам другого, а третьи стороны не равны; в таком случае против большей из этих сторон лежит больший угол; значит,

$$\angle CSD < \angle CSB. \quad (156)$$

Прибавив к левой части этого неравенства угол $\angle ASD$, а к правой равный ему угол $\angle ASB$, получим то неравенство, которое требовалось доказать:

$$\angle ASC < \angle CSB + \angle ASB. \quad (157)$$

Мы доказали, что даже наибольший плоский угол меньше суммы двух других углов. Значит, теорема доказана.

3. *Задача. Плоские углы трехгранного угла не прямые. В плоскостях его граней проведены прямые, перпендикулярные противоположным ребрам. Доказать, что все три прямые параллельны одной плоскости.*

Билет №19

19.1 Матанализ (непрерывность)

1. Непрерывность тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$.

Для доказательства непрерывности функции $\sin x$ применим определение непрерывности функции в терминах приращений, взяв некоторое приращение Δx : непрерывность $\sin x$ равносильна равенству

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin(x + \Delta x) = \sin x. \quad (158)$$

Докажем его:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin(x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\sin x \cos(\Delta x) + \cos x \sin(\Delta x)) \quad (159)$$

$$= \sin x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(\Delta x) + \cos x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin(\Delta x) \quad (160)$$

$$= \sin x \cdot 1 + \cos x \cdot 0 \quad (161)$$

$$= \sin x. \quad (162)$$

Далее выведем непрерывность косинуса. Из вышесказанного следует:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sin z = \sin z_0 \quad (163)$$

для любого z_0 . Определив x_0 как $z_0 - \frac{\pi}{2}$, выполним замену:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x_0 + \frac{\pi}{2}\right), \quad (164)$$

следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0 \quad (165)$$

что и доказывает непрерывность $\cos x$ по определению.

Непрерывность тангенса следует из определения тангенса как

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad (166)$$

и того, что частное непрерывных функций непрерывно.

2. Задача. Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \begin{cases} \sin(\pi x), & \text{если } x - \text{рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррациональное число.} \end{cases} \quad (167)$$

С.Н. допустила, что решение можно закончить, найдя хотя бы одну точку разрыва.

Рассмотрим y в точке $\frac{1}{2}$. Очевидно, что это рациональное число, поэтому $y\left(\frac{1}{2}\right) = \sin\left(\pi \cdot \frac{1}{2}\right) = 1$.

Доказывая от противного, предположим, что $\lim_{x \rightarrow 1/2-0} = 1$. По определению предела слева:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall x \in \left(\frac{1}{2} - \delta; \frac{1}{2}\right) : |y(x) - 1| < \varepsilon. \quad (168)$$

В контексте этого определения возьмем $\varepsilon = 1$. Так как между двумя действительными числами всегда существует некое иррациональное число, вне зависимости от δ между $\frac{1}{2} - \delta$ и $\frac{1}{2}$ есть некоторая точка, при которой $y(x)$ равна нулю, то есть, $|0 - 1| < \varepsilon$, иначе говоря $1 < 1$. Полученное противоречие доказывает то, что предел слева не равен 1 — значению функции при $\frac{1}{2}$, следовательно, $\frac{1}{2}$ — это точка разрыва y , поэтому y не является непрерывной на всей своей области определения.

19.2 Стереометрия (трехгранный угол)

1. Трехгранный угол.

См. билет №18.

2. Доказать, что биссекторные плоскости всех двугранных углов тетраэдра пересекаются в одной точке.

3. Задача. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен α . Найти плоский угол при вершине пирамиды.

Билет №20

20.1 Матанализ (непрерывность, первая и вторая теоремы Больцано — Коши)

1. Непрерывность функции.

Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0$.

2. Первая и вторая теоремы Больцано — Коши.

(a) Первая теорема Больцано — Коши.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a; b]$ и на концах этого промежутка принимает значения разных знаков. Тогда между a и b найдется точка c , в которой функция обращается в нуль.

(b) Вторая теорема Больцано — Коши.

Пусть функция определена и непрерывна в некотором промежутке X (замкнутом или нет, конечном или же бесконечном). Если в двух точках $x = a$ и $x = b$ ($a < b$) этого промежутка функция принимает неравные значения

$$f(a) = A \text{ и } f(b) = B, \quad (169)$$

то, каково бы ни было число C , лежащее между A и B , найдется такая точка $x = c$ между a и b , что

$$f(c) = C. \quad (170)$$

3. Производные синуса и частного.

Синус:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} \quad (171)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \sin \Delta x \cos x - \sin x}{\Delta x} \quad (172)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos \Delta x - 1) + \sin \Delta x \cos x}{\Delta x} \quad (173)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x \cos x}{\Delta x} \quad (174)$$

$$= \sin x \cdot 0 + 1 \cdot \cos x \quad (175)$$

$$= \cos x. \quad (176)$$

Частное:

4. Задача. Доказать, что уравнение $x^3 - 19x - 29 = 0$ имеет не менее двух действительных корней.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - 19x - 29$. Очевидно, что она непрерывна как разность непрерывных функций, при этом в свою очередь $19x$ и x^3 ($x \cdot x \cdot x$) непрерывны как произведения непрерывных функций.

Рассмотрим $f(x)$ на концах промежутка $[-4; -3]$: $f(-4) = (-4)^3 - 19(-4) - 29 = -17$, $f(-3) = (-3)^3 - 19(-3) - 29 = 1$. Получается, что данный промежуток удовлетворяет условиям первой теоремы Больцано — Коши, и это значит, что существует точка $c_1 \in [-4; -3]$, в которой $f(x)$ обращается в нуль, то есть c_1 — корень.

Рассмотрим теперь $f(x)$ на концах непересекающегося с предыдущим промежутка $[4; 5]$: $f(4) = -41$, $f(5) = 1$. Данный промежуток также удовлетворяет условиям первой теоремы Больцано — Коши, а потому существует точка $c_2 \in [4; 5]$, являющаяся корнем.

Не может быть такого, что $c_1 = c_2$, потому что они принадлежат двум непересекающимся промежуткам, следовательно уравнение $x^3 - 19x - 29 = 0$ имеет как минимум два корня c_1, c_2 , ч. т. д.

20.2 Трехгранный угол (первая теорема косинусов для трехгранного угла)

1. Трехгранный угол.

См. билет №18.

2. Первая теорема косинусов для трехгранного угла.

См. рис. 34.

В трехгранном угле с плоскими углами α, β, γ и противоположными им двугранными углами $\angle A, \angle B, \angle C$

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cdot \cos(\angle A). \quad (177)$$

Доказательство:

- (a) Возьмем произвольный отрезок AO длиной l , лежащий на ребре двугранного угла $\angle A$.
- (b) Из прямоугольных $\triangle OAB, \triangle OAC$: $BO = \frac{l}{\cos \gamma}, CO = \frac{l}{\cos \beta}, AB = \frac{l}{\operatorname{tg} \gamma}, AC = \frac{l}{\operatorname{tg} \beta}$.
- (c) В $\triangle BOC$ по теореме косинусов $BC^2 = BO^2 + OC^2 - 2OB \cdot OC \cdot \cos \alpha$.
- (d) В $\triangle BAC$ по теореме косинусов $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos(\angle A)$.
- (e) Подставив длины в теоремы косинусов, заменив тангенсы на их определение, получаем:

$$\frac{l^2}{\cos^2 \gamma} + \frac{l^2}{\cos^2 \beta} - 2 \cdot \frac{l}{\cos \gamma} \cdot \frac{l}{\cos \beta} \cdot \cos \alpha = l^2 \cdot \frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 \gamma} + l^2 \cdot \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} - 2l^2 \frac{\cos \gamma \cdot \cos \beta}{\sin \gamma \cdot \sin \beta} \cos(\angle A). \quad (178)$$

(f) Упрощаем:

$$\frac{1}{\cos^2 \gamma} + \frac{1}{\cos^2 \beta} - 2 \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot \frac{1}{\cos \beta} \cdot \cos \alpha = \frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 \gamma} + \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} - 2 \frac{\cos \gamma \cdot \cos \beta}{\sin \gamma \cdot \sin \beta} \cos(\angle A); \quad (179)$$

$$2 - 2 \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot \frac{1}{\cos \beta} \cdot \cos \alpha = -2 \frac{\cos \gamma \cdot \cos \beta}{\sin \gamma \cdot \sin \beta} \cos(\angle A); \quad (180)$$

$$\cos \gamma \cos \beta - \cos \alpha = -\sin \gamma \sin \beta \cos(\angle A); \quad (181)$$

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos(\angle A). \quad (182)$$

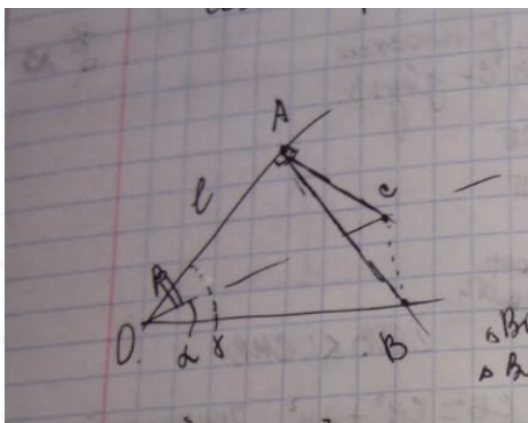


Рис. 34: Чертеж к теореме

3. *Задача. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен α . Найти плоский угол при вершине пирамиды.*

См. билет №19.

Билет №21

21.1 Логарифм (логарифмическая функция, тождества)

1. Логарифмическая функция: определение и основные свойства.

Определение:

Пусть x — строго положительное действительное число.

Пусть a — строго положительное действительное число, при этом $a \neq 1$.

Логарифм x по основанию a определяется как:

$$\log_a x = y \in \mathbb{R} : a^y = x \quad (183)$$

Свойства:

- (a) $D(\log_a x) = \{x \in \mathbb{R} \mid (a \neq 0 \text{ и } a \neq 1 \text{ и } a = x) \text{ или } (x > 0 \text{ и } 0 < a < 1) \text{ или } (x > 0 \text{ и } a > 1)\}$.
- (b) $E(\log_a x) = \{y \in \mathbb{R} \mid \ln a \neq 0\}$.
- (c) $\log_a x \nearrow$ при $a > 1$.
- (d) $\log_a x \searrow$ при $0 < a < 1$.

2. Логарифмические тождества.

(a) $x = a^{\log_a x}$.

Пусть $\log_a x = y$. Тогда $a^y = x$, следовательно, $a^{\log_a x} = x$.

(b) $\log_a a = 1$.

Доказательство:

$$a^1 = a \Rightarrow \log_a a = 1 \quad (184)$$

по определению логарифма.

(c) $\log_a 1 = 0$.

Доказательство:

Для любого $a \neq 0$

$$a^0 = 1 \Rightarrow \log_a 1 = 0 \quad (185)$$

по определению логарифма.

(d) $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$ и $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$.

Доказательство суммы:

$$\log_b x + \log_b y = \log_b (b^{\log_b x + \log_b y}) \quad (186)$$

$$= \log_b (b^{\log_b x}) (b^{\log_b y}) \quad (187)$$

$$= \log_b (xy). \quad (188)$$

Доказательство разности:

$$\log_b x - \log_b y = \log_b b^{\log_b x - \log_b y} \quad (189)$$

$$= \log_b \frac{(b^{\log_b x})}{(b^{\log_b y})} \quad (190)$$

$$= \log_b \frac{x}{y}. \quad (191)$$

(e) $\log_a x^r = r \log_a x$.

Доказательство:

Пусть $y = r \log_a x$.

Тогда

$$a^y = a^{r \log_a x} \quad (192)$$

$$= (a^{\log_a x})^r \quad (193)$$

$$= x^r. \quad (194)$$

(f) $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.

Доказательство:

Пусть:

$$y = \log_b x \Leftrightarrow b^y = x; \quad (195)$$

$$z = \log_a x \Leftrightarrow a^z = x. \quad (196)$$

Тогда:

$$z = \log_a b^y \quad (197)$$

$$= y \log_a b \quad (198)$$

$$= \log_b x \log_a b. \quad (199)$$

3. Задача. Сравнить числа $\sqrt{8}$ и $2^{2 \log_2 5 + \log_{1/2} 9}$.

$$2^{2 \log_2 5 + \log_{1/2} 9} = (2^{\log_2 5})^2 \cdot 2^{\log_{1/2} 9} = 5 \cdot 2^{-\log_2 9 / \log_2 2} = 5 \cdot \frac{5}{9} = \frac{25}{9} \approx 2,7; \quad (200)$$

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,8; \quad (201)$$

$$2,7 < 2,8 \Rightarrow 2^{2 \log_2 5 + \log_{1/2} 9} < \sqrt{8}. \quad (202)$$

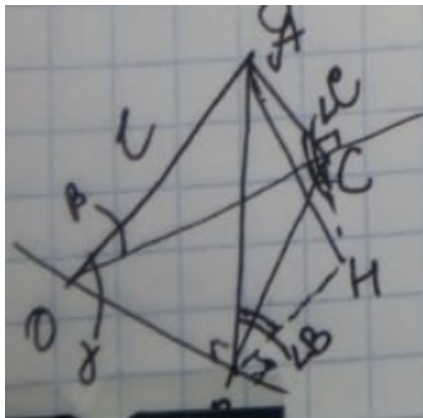


Рис. 35: Чертеж к доказательству

21.2 Стереометрия (теорема синусов трехгранного угла)

1. Теорема синусов для трехгранного угла: $\frac{\sin \alpha}{\sin(\angle A)} = \frac{\sin \beta}{\sin(\angle B)} = \frac{\sin \gamma}{\sin(\angle C)}$, где α, β, γ — плоские углы, а $\angle A, \angle B, \angle C$ — противоположные двугранные углы.

См. рис. 35.

Возьмем точку A на ребре трехгранного угла на некотором расстоянии l . Возьмем точки B, C на других двух ребрах так, что $AB \perp OB, AC \perp OC$. Возьмем точку H такую, что $AH \perp OC, HB \perp OB, HC \perp OC$.

$$\text{В } \triangle AOB: AB = \frac{l}{\sin \gamma}.$$

$$\text{В } \triangle AOC: AC = \frac{l}{\sin \beta}.$$

Из теоремы синусов в $\triangle ABH, \triangle ACH$: $AH = AB \cdot \sin(\angle B) = AC \cdot \sin(\angle C)$.

Подставив длины AB, AC , имеем:

$$l \sin \gamma \sin(\angle B) = l \sin \beta \sin(\angle C). \quad (203)$$

Разделив на синусы двугранных углов, имеем:

$$\frac{\sin \gamma}{\sin(\angle C)} = \frac{\sin \beta}{\sin(\angle B)}. \quad (204)$$

Аналогично можно доказать равенство полученных отношений $\frac{\sin \alpha}{\sin(\angle A)}$.

2. *Задача. В одной из граней двугранного угла величины α проведена прямая l под углом β к ребру двугранного угла и образующая с другой гранью угол γ . Доказать, что $\sin \gamma = \sin \alpha \sin \beta$.*

Билет №22

22.1 Матанализ (первая и вторая теоремы Вейерштрасса)

1. Ограниченность непрерывной функции: первая и вторая теоремы Вейерштрасса.

(а) Первая теорема Вейерштрасса.

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a; b]$, то она ограничена, т. е. существуют такие постоянные и конечные числа m и M , что

$$m \leq f(x) \leq M \text{ при } a \leq x \leq b. \quad (205)$$

(б) Вторая теорема Вейерштрасса.

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a; b]$, то она достигает в этом промежутке своих супремума и инфимума.

2. Производные тангенса, котангенса, суммы и произведения.

Тангенс:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad (206)$$

Котангенс:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{\sin x (-\sin x) - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad (207)$$

Сумма:

$$\forall f(x) = j(x) + k(x) : f'(\xi) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \quad (208)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(j(\xi + \Delta x) + k(\xi + \Delta x)) - (j(\xi) + k(\xi))}{\Delta x} \quad (209)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{j(\xi + \Delta x) + k(\xi + \Delta x) - j(\xi) - k(\xi)}{\Delta x} \quad (210)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(j(\xi + \Delta x) - j(\xi)) + (k(\xi + \Delta x) - k(\xi))}{\Delta x} \quad (211)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{j(\xi + \Delta x) - j(\xi)}{\Delta x} + \frac{k(\xi + \Delta x) - k(\xi)}{\Delta x} \right) \quad (212)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{j(\xi + \Delta x) - j(\xi)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k(\xi + \Delta x) - k(\xi)}{\Delta x} \quad (213)$$

$$= j'(\xi) + k'(\xi) \quad (214)$$

при условии, что j и k гладкие.

Произведение:

$$\forall f(x) = j(x) k(x) : f'(\xi) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \quad (215)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{j(\xi + \Delta x) k(\xi + \Delta x) - j(\xi) k(\xi)}{\Delta x} \quad (216)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{j(\xi + \Delta x) k(\xi + \Delta x) - j(\xi + \Delta x) k(\xi) + j(\xi + \Delta x) k(\xi) - j(\xi) k(\xi)}{\Delta x} \quad (217)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(j(\xi + \Delta x) \frac{k(\xi + \Delta x) - k(\xi)}{\Delta x} + \frac{j(\xi + \Delta x) - j(\xi)}{\Delta x} k(\xi) \right) \quad (218)$$

$$= j(\xi) k'(\xi) + j'(\xi) k(\xi) \quad (219)$$

при условии, что j и k гладкие.

3. Задача. Является ли функция $y = \begin{cases} (x^2 - 4) / (x - 2), & x \neq 2, \\ 4, & x = 2 \end{cases}$ непрерывной в точке $x_0 = 2$.

(a) y определена для 2, $y(2) = 4$.

(b) Найдем предел слева:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x + 2) = 4 \quad (220)$$

(c) Найдем предел справа:

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2+0} (x + 2) = 4 \quad (221)$$

(d) Т. к., функция определена в x_0 , а односторонние пределы равны и конечны, функция непрерывна в данной точке.

22.2 Стереометрия (трехгранный угол)

1. Трехгранный угол.

См. билет №18.

2. Доказать, что сумма плоских углов трехгранного угла меньше 2π , а сумма двугранных углов — больше π .

3. Задача. Доказать, что величина каждого плоского угла трехгранного угла меньше суммы величин двух других его плоских углов.

Эта задача решена как доказательство свойства плоских углов, поэтому см. билет №18.

Билет №23

23.1 Матанализ (производная, теоремы Лагранжа и Коши)

1. Производная функции.

Предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению независимой переменной Δx , при стремлении Δx к 0, т. е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (222)$$

называется производной функции $y = f(x)$ по независимой переменной x , при данном ее значении (или в данной точке) $x = x_0$.

2. Теоремы Лагранжа и Коши.

(a) Теорема Лагранжа

Пусть:) $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a; b]$, 2) существует конечная производная $f'(x)$, по крайней мере, в открытом промежутке $(a; b)$. Тогда между a и b найдется такая точка c ($a < c < b$), что для нее выполняется равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \quad (223)$$

(b) Теорема Коши

Пусть 1) функция $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в замкнутом промежутке $[a; b]$; 2) существуют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, по крайней мере, в открытом промежутке $(a; b)$; 3) $g'(x) \neq 0$ в промежутке $(a; b)$.

Тогда между a и b найдется такая точка c ($a < c < b$), что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (224)$$

3. Производные константы и сложной функции.

Константа:

$$\forall c : (\forall x : f_c(x) = c) \Rightarrow f'_c(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_c(x + \Delta x) - f_c(x)}{\Delta x} \quad (225)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} \quad (226)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} \quad (227)$$

$$= 0. \quad (228)$$

Сложная функция

$$\forall u = \phi(x) : \forall y = f(u) : y' = f'(\phi(x)) \phi'(x). \quad (229)$$

при условии, что $f(x)$, $\phi(x)$ — гладкие функции.

Доказательство:

Придадим x_0 произвольное приращение Δx ; пусть Δu — соответствующее приращение $u = \phi(x)$, Δy — приращение $y = f(u)$, вызванное Δu . По формуле приращения функции:

$$\Delta y = f'(u) \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u \quad (230)$$

(α зависит от Δu , $\alpha \rightarrow 0$). Поделим почленно на Δx :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}. \quad (231)$$

Если $\Delta x \rightarrow 0$, то Δu . Вместе с этим, т. к. $\alpha \rightarrow 0$, существует предел:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) \phi'(x) = f'(\phi(x)) \phi'(x), \quad (232)$$

ч. т. д..

4. Задача. Найти производную функции $y = e^x \cdot \sin x$.

$$y' = (e^x \cdot \sin x)' = \cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x = e^x (\cos x + \sin x). \quad (233)$$

23.2 Стереометрия (первая теорема косинусов для трехгранного угла)

1. Первая теорема косинусов для трехгранного угла.

См. билет №20.

2. *Задача. Доказать, что если все плоские углы трехгранного угла тупые, то и все его двугранные углы тоже тупые.*

Билет №24

24.1 Матанализ (производная, производные основных элементарных функций)

1. Производная функции.

См. билет №23.

2. Геометрический смысл производной.

Угловой коэффициент $\operatorname{tg} \alpha$ касательной есть производная ординаты y по абсциссе x .

3. Производные степенной функции и арксинуса

Кубическая функция, для доказательства может потребоваться вывести формулу производной произведения двух функций:

$$(x^3)' = (x \cdot x \cdot x)' = (x \cdot x)'x + x'(x \cdot x) = x(x' \cdot x + x \cdot x') + x^2 = 2x^2 + x^2 = 3x^2. \quad (234)$$

Арксинус:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (235)$$

4. *Задача. Исходя из определения, найти производную функции $y = x^2$ в точке $x = 1/4$.*

$$y' \left(\frac{1}{4} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (236)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{4} + \Delta x \right)^2 - \left(\frac{1}{4} \right)^2}{\Delta x} \quad (237)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{16} + \frac{2\Delta x}{4} + \Delta x^2 - \frac{1}{16}}{\Delta x} \quad (238)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{2\Delta x}{4} + \Delta x^2}{\Delta x} \quad (239)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + \Delta x \right) \quad (240)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (241)$$

24.2 Стереометрия (теорема синусов для трехгранного угла)

1. Теорема синусов для трехгранного угла.

См. билет №21.

2. *Задача. Дан двугранный угол величиной 60° . Правильный треугольник ABC лежит в плоскости одной его грани, причем вершина A лежит на ребре двугранного угла. Сторона AB образует с другой гранью угол в 30° . Найти угол, образуемый стороной AC со второй гранью.*